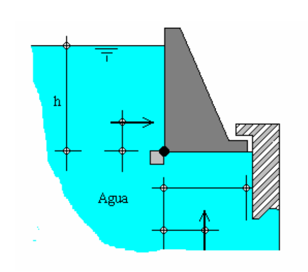
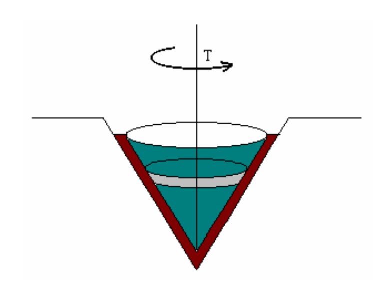
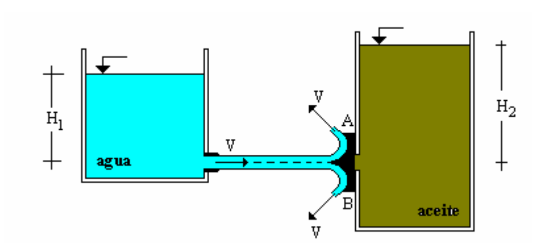
PROBLEMARIO PARA MECANICA DE LOS FLUIDOS I

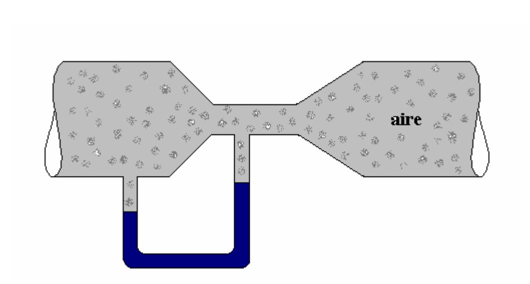


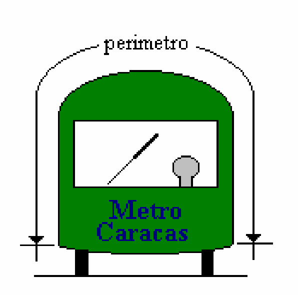


PROFESOR

LIONEL RAMON FERNANDEZ GEGNER







UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE INGENIERIA
ESCUELA DE CIVIL
MERIDA - VENEZUELA
JULIO - 2001

AGRADECIMIENTO

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a Mildred, por la labor realizada durante toda la ejecución del presente trabajo, haciendo con entusiasmo y esmero el texto y las correcciones que fueron necesarias, disponiendo parte de su tiempo para que éste fuera terminado en la fecha prevista.

A todos aquellos amigos que me dieron ideas con el fin de mejorar el presente trabajo y me animaron a culminarlo.

A Aura y a todos aquellos que de una u otra forma me ayudaron, en otras actividades, dejándome tiempo libre para hacer posible su terminación.

Lionel

DEDICADO A MIS HERMANOS

Ciro
Carlos
Hortencia
Nancy
Erika

INDICE

Capítulo 1

Capítulo 2

Capítulo 3

Capítulo 4

Capítulo 5

Capítulo 1

PROPIEDADES DE LOS FLUIDOS

Problema 1.1
Un recipiente cilíndrico de 1.00 m de diámetro y 2.00 m de alto pesa 30.00 kg, si se llena con un líquido el conjunto pesa 1500.00 kg, determinar el peso específico del líquido, la densidad y el peso específico relativo o densidad relativa.

El peso específico γ, es por definición, la relación que existe entre el peso de un elemento y su volumen; es decir,

$$\gamma = \frac{W}{V} = \frac{W_2 - W_1}{\frac{\pi}{4} d^2 \; h}$$

Al sustituir los valores numéricos resulta

$$\gamma = \frac{1500.00 - 30.00}{\frac{\pi}{4} 1.00^2 \; x \; 2.00} = 936.31 \text{ kg/m}^3$$

La densidad ρ, es por definición, la relación que existe entre la masa de un elemento y su volumen o también, la relación entre el peso específico de un elemento y la aceleración de la gravedad; es decir,

$$\rho = \frac{\gamma}{g} = \frac{936.31}{9.81} = 94.93 \frac{\text{kg} \;\; s^2/m}{m^3} \qquad \Rightarrow \qquad \rho = 94.93 \text{ UTM/m}^3$$

La densidad relativa, o peso específico relativo, S, es un número adimensional que resulta de la relación entre el peso específico densidad de un elemento y el peso específico o densidad del agua en condiciones normales; es decir,

$$S = \frac{\gamma}{\gamma_{ag}} = \frac{\rho}{\rho_{ag}} = \frac{936.31}{1000} = 0.936$$

Problema 1.2
Determinar la viscosidad cinemática del benceno a 15°C en Stokes.

Con una temperatura de 15° C se encuentra, en la curva de viscosidad correspondiente al benceno

$\nu = 7.60 \times 10^{-7}\ m^2/s$

Las equivalencias son

$1\ Stoke = 1\ cm^2/seg = 10^{-4}\ m^2/s$

$1\ m^2/s = 10^4\ Stokes$

por lo tanto

$\nu = 7.60 \times 10^{-7} \times 10^4 = 7.60 \times 10^{-3}\ Stokes$

Problema 1.3
Un fluido tiene una viscosidad de 4 centipoises y un peso específico de 800 kg/m³. Determinar la viscosidad cinemática en el sistema técnico de unidades y en Stokes.

$$\mu = 4\ centipoise = 0.04\ poises = 0.04\ \frac{dinas\ \ s}{cm^2}$$

La equivalencia entre ambos sistemas es

$$\mu = \frac{0.04}{98}\ \frac{kg\ \ s}{m^2}$$

$$\mu = 4.082 \times 10^{-4}\ \frac{kg\ \ s}{m^2}$$

por definición la densidad es

$$\rho = \frac{\gamma}{g} = \frac{800}{9.81} = 81.55 \frac{kg\ s^2}{m^4} \quad \Rightarrow \quad \rho = 81.55\ \frac{UTM}{m^3}$$

La viscosidad cinemática es, por definición

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{4.082 \times 10^{-4}}{81.55}$$

$$\nu = 5.005 \times 10^{-6}\ \frac{m^2}{s}$$

La equivalencia es entre ambos sistemas es

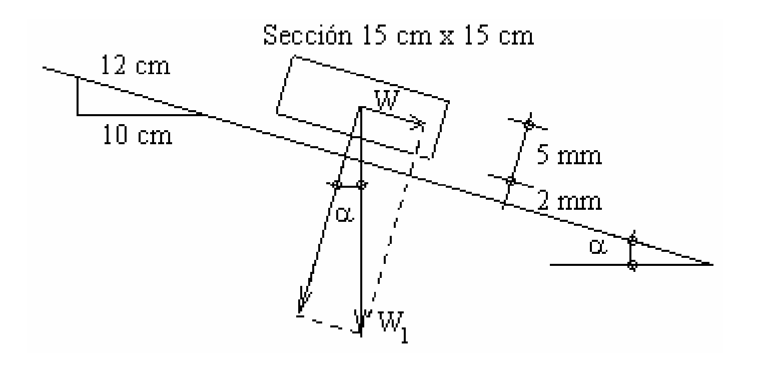
$$\nu = 5.005 \times 10^{-6} \frac{m^2}{s} \times 10^4$$

$$\nu = 5.005 \times 10^{-2} \frac{cm^2}{s} \quad \Rightarrow \quad \nu = 5.005 \times 10^{-2} \text{ Stokes}$$

Problema 1.4

Calcular la viscosidad cinemática del aceite, de peso específico 800 kg/m^3, que se encuentra entre las placas planas que se muestran en la figura.

La placa superior se mueve a una velocidad de 1.80 m/s y tiene un peso específico de 1500 kg/m^3.



El peso de la placa superior es

$W_1 = 0.15 \times 0.15 \times 0.005 \times 1500 = 0.169$ kg

El ángulo de inclinación de la placa con respecto a la horizontal es

$$\cos \alpha = \frac{10}{12} = 0.834 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 33.6^{o}$$

La fuerza que produce el movimiento es la componente del peso en el sentido del plano de deslizamiento es decir,

$W = 0.169 \times \text{ sen } \alpha = 0.0935$ kg

La ecuación de viscosidad es

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

si la distribución de velocidades en forma lineal se expresa como

$$\frac{F}{A} = \mu \frac{u}{y}$$

al despejar resulta

$$\mu = \frac{F}{A}\frac{y}{u}$$

al sustituir se obtiene

$$\mu = \frac{0.0935}{0.15 \times 0.15} \times \frac{0.002}{1.80}$$

$$\mu = 4.63 \times 10^{-3} \frac{\text{kg s}}{\text{m}^2}$$

La viscosidad cinemática es, por definición, la relación entre la viscosidad dinámica o absoluta y la densidad del fluido; es decir,

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

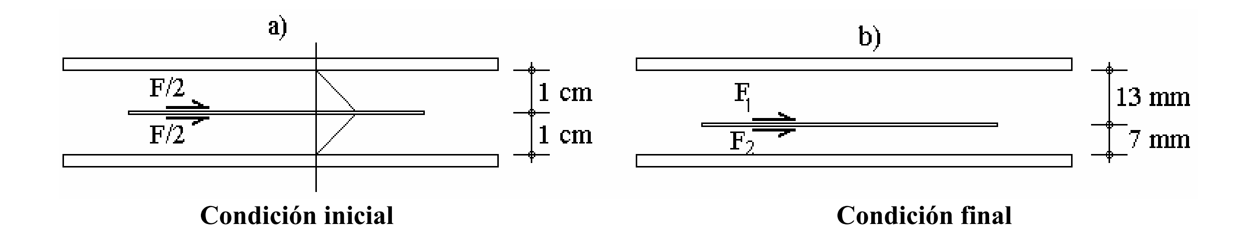
$$\nu = \frac{4.63 \times 10^{-3}}{\left(\frac{800}{9.81}\right)} = 5.66 \times 10^{-5} \ \text{m}^2/\text{s}$$

Problema 1.5

El espacio entre dos grandes superficies planas de 2.00 cm, se ha llenado con un líquido de peso específico relativo 0.8. Determinar:

a) La viscosidad cinemática, si la fuerza requerida para remolcar una lámina muy delgada de 4000 cm^2 a una velocidad de 20.00 cm/seg es de 0.700 kg, cuando dicha lámina permanece equidistante de las superficies.

b) La fuerza, si la lámina se encuentra a 7 mm de una de las superficies.



Cuando la placa móvil se encuentra equidistante de ambas superficies, la fuerza en la cara superior es igual a la fuerza en la cara inferior, resultando para cada cara una fuerza de

$F_T = F_S + F_I \qquad \Rightarrow \qquad F_I = F_S = \dfrac{F_T}{2}$

Como la ecuación de viscosidad es

$$\frac{F}{A} = \mu \frac{u}{y}$$

resulta

$$\mu = \frac{F}{2A}\ \frac{y}{u}$$

Al sustituir los valores numéricos se tiene

$$\mu = \frac{0.700 \times 0.01}{2\left(4000 \times 10^{-4}\right) 0.20}$$

$$\mu = 0.044\ \frac{kg\ \ s}{m^2}$$

$$\nu = \frac{0.044}{0.8 \times 102} \qquad \Rightarrow \qquad \nu = 5.39 \times 10^{-4}\ m^2/s$$

Cuando la placa móvil se encuentra a 13 mm de la placa superior las fuerzas son diferentes resultando

$F_T = F_1 + F_2$

Para la cara superior la fuerza necesaria es

$$F_1 = A\ \mu\ \frac{u}{y_1}$$

$$F_1 = \frac{4000 \times 10^{-4} \times 0.044 \times 0.20}{(0.02 - 0.007)}$$

$F_1 = 0.271$ kg

Para la cara inferior la fuerza necesaria es

$$F_2 = A\ \mu\ \frac{u}{y_2}$$

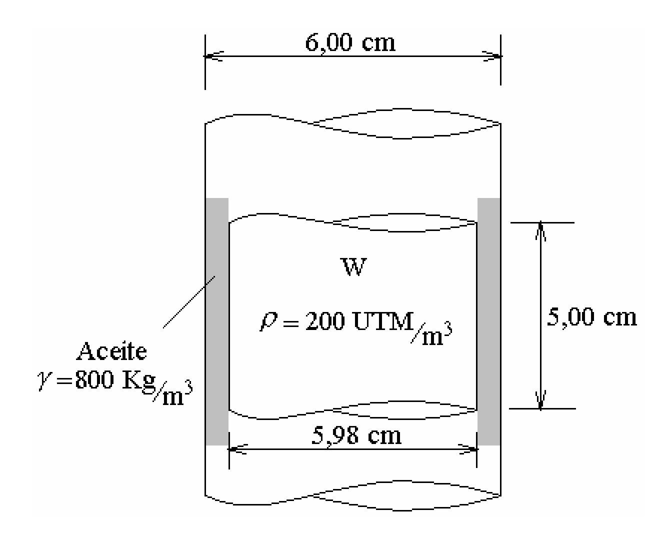
$$F_2 = \frac{4000 \times 10^{-4} \times 0.044 \times 0.20}{0.007}$$

$F_2 = 0.503$ kg

Siendo la fuerza total

$F_T = 0.271 + 0.503 = 0.774$ kg

Problema 1.6
Un cilindro macizo, de peso W, cae en el interior de un cilindro hueco, según se indica en la figura, a una velocidad constante de 4.00 cm/s. Determinar la viscosidad del aceite que se encuentra entre ambos cilindros.



Como la ecuación de viscosidad es

$$\tau = \frac{F}{A} = \mu \frac{u}{y}$$

$$\mu = \frac{F}{A}\frac{y}{u}$$

La fuerza F, corresponde al peso del cilindro interno, W, es igual a la densidad por la aceleración de la gravedad y por el volumen; es decir,

$$F = \rho\ g\ V$$

$$F = 200 \times 9.81 \frac{\pi}{4} 0.0598^2 \times 0.05$$

$$F = 0.276\ kg$$

El área lateral de la superficie que se mueve es

$$A = \pi\ D\ L$$

$$A = \pi \times 0.0598 \times 0.05$$

$$A = 9.393 \times 10^{-3}\ m^2$$

La separación entre la superficie móvil del el cilindro que cae, y la fija del cilindro exterior es

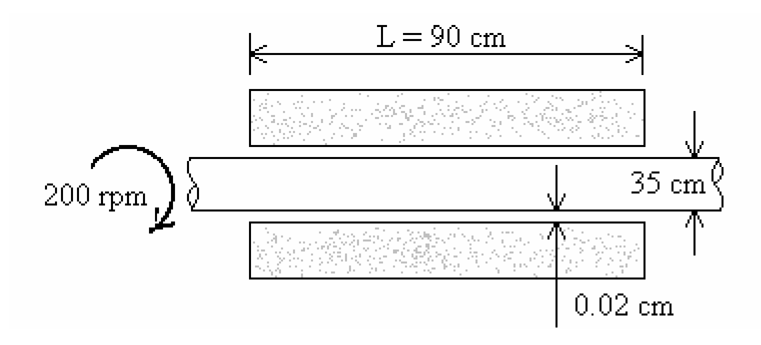
$$y = \frac{0.06 - 0.0598}{2}$$

$y = 1 \times 10^{-4}$ m

Sustituyendo los valores calculados anteriormente se obtiene

$$\mu = \frac{0.276 \times 1 \times 10^{-4}}{9.393 \times 10^{-3} \times 0.04} = 0.073 \ \frac{\text{kg s}}{\text{m}^2}$$

Problema 1.7
Calcular aproximadamente el número de caballos de fuerza perdidos por rozamiento en la chumacera que se muestra en la figura, si el fluido tiene una viscosidad dinámica o absoluta de $\mu = 0.05$ kg s/m^2.



de la figura se obtiene

n = 200 rpm, d = 35 cm, t = 0.02 cm, L = 90 cm

La velocidad lineal se puede expresar en función de las revoluciones por minuto y el diámetro como

$$u = \frac{2\,\pi\, r\, n}{60} = \frac{\pi\, d\, n}{60}$$

que al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$u = \frac{\pi \ 0.35 \times 200}{60} \quad \Rightarrow \quad u = 3.66 \text{ m/s}$$

El área lateral de la superficie móvil es

$A = \pi\, d\, L$

al sustituir los valores numéricos se obtiene

$A = \pi \times 0.35 \times 0.90 \qquad \Rightarrow \qquad A = 0.98\ m^2$

Como la ecuación de viscosidad es

$$\tau = \frac{F}{A} = \mu \frac{u}{t}$$

$$F = \mu \frac{u A}{t}$$

$$F = 0.05 \times \frac{3.66 \times 0.98}{0.0002}$$

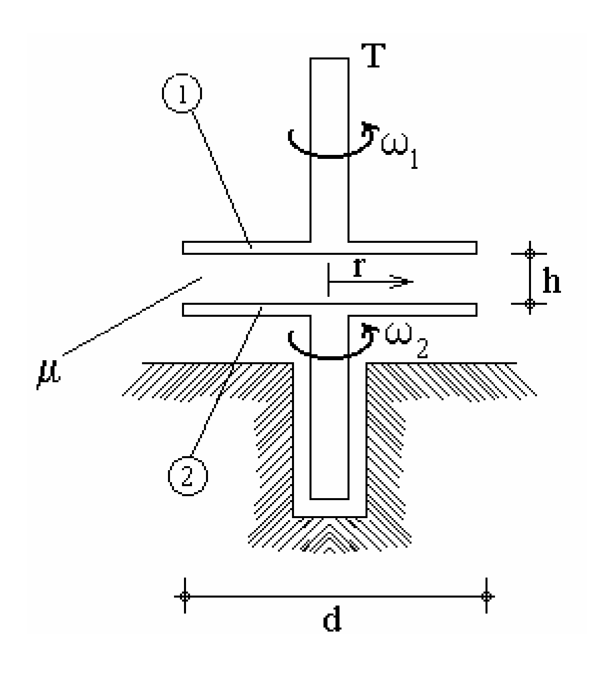
$F = 896.7$ kg

La potencia necesaria, en caballos de vapor, para vencer el rozamiento es igual a

$$P_{CV} = \frac{F\,u}{75} = \frac{896.7 \times 3.66}{75} \qquad \Rightarrow \qquad P = 43.76\ CV$$

Problema 1.8

Mediante un torque T, se hace girar el disco (1) con una velocidad angular ω_1.En la separación, h, entre los dos discos mostrados hay un aceite de viscosidad μ. Si el disco (2) gira libremente por la acción de rotación del disco (1), y ambos discos tienen un diámetro, ϕ .Determinar la velocidad de rotación ω del disco (2), despreciando los efectos en los extremos.



La ecuación de viscosidad es

$$\tau = \frac{F}{A} = \mu \frac{u}{t}$$

para el presente caso esta se puede expresar como

$$\tau = \mu \frac{u}{t} = \frac{V_1 - V_2}{h} = \mu \frac{\omega_1 r - \omega_2 r}{h}$$

$$\tau = \mu \frac{(\omega_1 - \omega_2)\, r}{h}$$

como τ varía con r entonces, la fuerza que actúa sobre un diferencial de área es

$$dF = \tau\, dA = \tau\, 2\, \pi\, r\, dr = \mu \frac{(\omega_1 - \omega_2)\, r}{h} 2\, \pi\, r\, dr$$

$$dF = \mu\, 2\, \pi\, \frac{(\omega_1 - \omega_2)\, r^2}{h}\, dr$$

y el torque o momento es

$$dT = dF \quad r = \mu\, 2\, \pi\, \frac{(\omega_1 - \omega_2)\, r^3}{h}\, dr$$

El torque o momento total se obtiene integrando; así,

$$T = \int_0^{\frac{d}{2}} dT = \int_0^{\frac{d}{2}} \mu\, 2\, \pi\, \frac{(\omega_1 - \omega_2)\, r^3}{h}\, dr = \mu\, 2\, \pi\, \frac{(\omega_1 - \omega_2)}{h} \int_0^{\frac{d}{2}} r^3\, dr$$

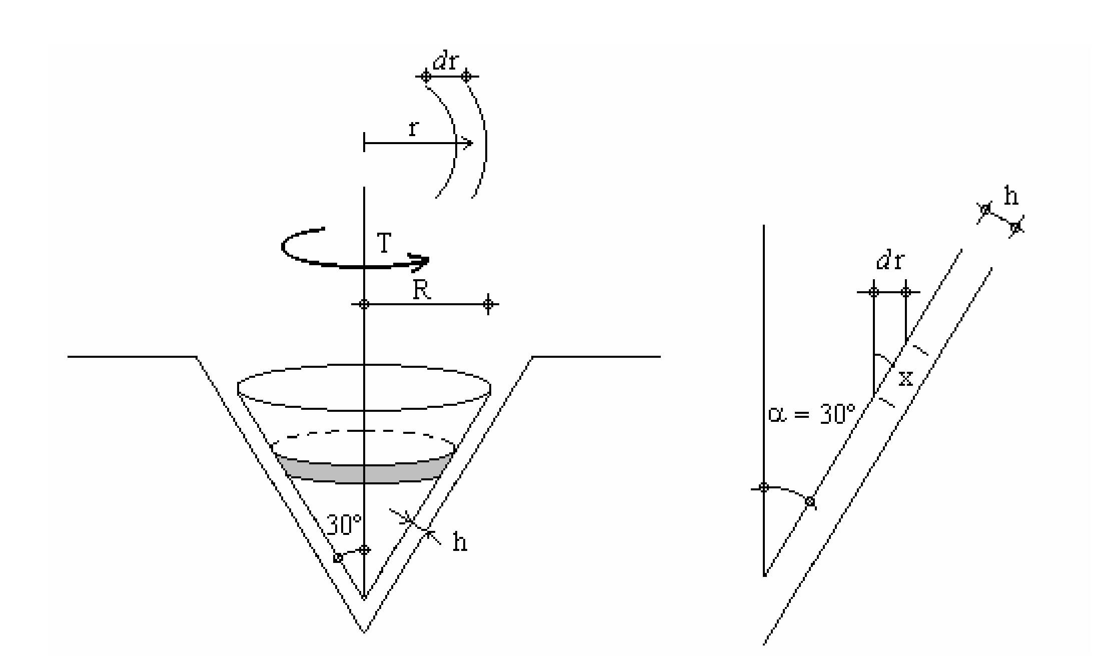
$$T = \mu\, 2\, \pi\, \frac{(\omega_1 - \omega_2)}{h} \frac{(d/2)^4}{4}$$

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{4hT}{\mu\, 2\, \pi \left(\frac{d}{2}\right)^4}$$

$$\omega_2 = \omega_1 - \frac{4\, h\, T}{\mu\, 2\, \pi \left(\frac{d}{2}\right)^4}$$

Problema 1.9

Un aceite de viscosidad μ de 0.01 kg s/m^2, se encuentra en el espacio, h de 1 mm, según se muestra en la figura. Calcular el torque T, requerido para rotar el cono de radio R de 20 cm y ángulo α de 30 º, si velocidad de rotación n es de 100 rpm.



El torque o momento total es

T = fuerza x brazo

La ecuación de viscosidad es

$$\tau = \frac{F}{A} = \mu \frac{u}{t}$$

La ecuación de viscosidad, para una franja diferencial es

$$\frac{dF}{dA} = \mu \frac{u}{h}$$

El diferencial de área, lateral es

$$dA = \frac{2\,\pi\,r\,dr}{sen\,\alpha}$$

La velocidad lineal, a una distancia r del eje de rotación es

$$u = \frac{2\,\pi\,r\,n}{60}$$

El diferencial de fuerza, que actúa en el diferencia de área es

$$dF = \mu \frac{u}{h} dA$$

El diferencial de torque es igual al producto del diferencial de fuerza por el brazo instantáneo r

$$dT = \mu \; \frac{2\,\pi\,r\,n}{60\,h} \; \frac{2\pi r dr}{sen\alpha} r$$

El torque total se obtiene al integrar la expresión anterior; es decir,

$$T = \mu \; \frac{4\,\pi^2 n}{60\,h\,sen\,\alpha} \int_0^R r^3 dr$$

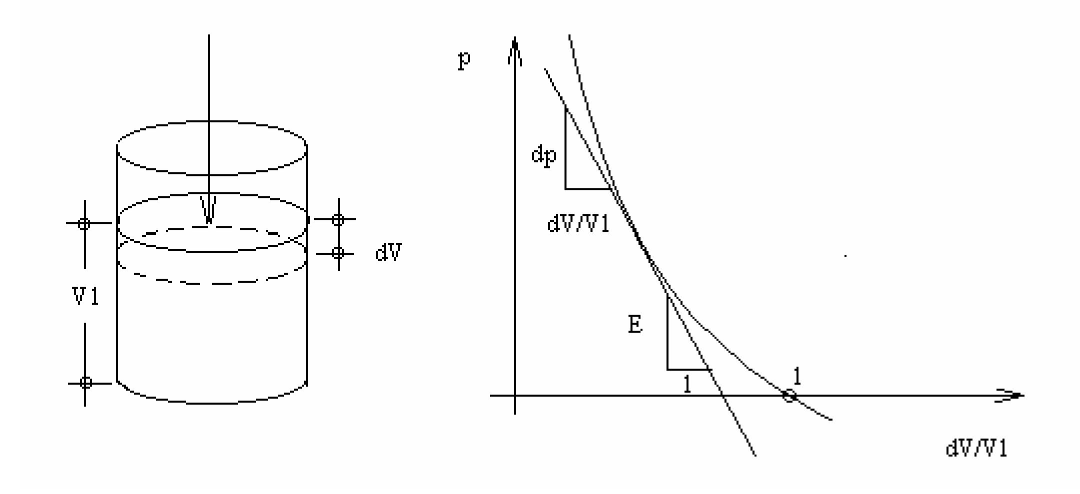
$$T = \frac{\mu\,4\,\pi^2\,n}{60\,h\,sen\,\alpha} R^4$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$T = \frac{0.01 \times \pi^2 \times 100 \times 0.20^4}{60 \times 0.001 \times sen\,30^0}$$

T = 0.526 kg m

Problema 1.10
Un líquido comprimido en un cilindro tiene un volumen de 0.400 m^3 a 70 kg/cm^2 y un volumen de 0.396 m^3 a la presión de 140 kg/cm^2. Determinar el módulo de elasticidad volumétrico.



El módulo de elasticidad volumétrico por definición es

$$E = -\frac{dp}{dV/V_1} = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V_1}$$

$$E = -\frac{\text{presión final} - \text{presión inicial}}{(\text{volumen final} - \text{volumen inicial}) / \text{volumen inicial}}$$

Para una presión inicial de 70 kg/cm^2 corresponde un volumen inicial de 0.400 m^3

Para una presión final de 140 kg/cm^2 corresponde un volumen final de 0.396 m^3

Que al sustituir en la ecuación anterior se obtiene

$$E = -\frac{140 - 70}{(0.396 - 0.400) / 0.400} = 7000\ kg/cm^2$$

Problema 1.11
Si se aplica una presión de 10 kg/cm^2 a 1.00 m^3 de agua en condiciones normales, determinar cuánto disminuye el volumen si el módulo de elasticidad volumétrico es 21000 kg/cm^2.

El módulo de elasticidad volumétrico por definición es

$$E = -\frac{dp}{dV/V_1}$$

Al despejar la variación de volumen se obtiene

$$-dV = \frac{V_1\ dp}{E}$$

$$-dV = \frac{1 \times 10}{21000} = \frac{1}{2100}\ m^3 = 4.76 \times 10^{-4}\ m^3 = 476\ cm^3$$

Problema 1.12
Si el agua tiene un módulo de elasticidad volumétrico de E = 21000 kg/cm^2. Determinar la presión requerida para reducir su volumen un 0.5 %

El módulo de elasticidad volumétrico por definición es

$$E = -\frac{dp}{dV/V_1} = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V_1}$$

$$E = 21000\ kg / cm^2$$

$$\Delta V = 0.995V_1 - V_1$$

$$\Delta V = -0.005V_1$$

$$\frac{\Delta V}{V_1} = -0.005$$

que al sustituir se obtiene

$$21000 = -\frac{\Delta p}{-0.005}$$

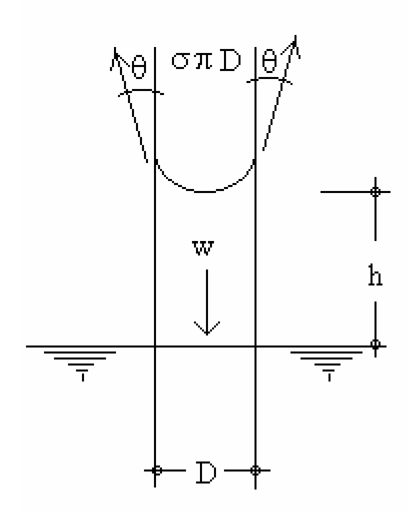
entonces

$$\Delta p = 21000 \times 0.005 = 105\ kg/cm^2$$

si la presión inicial es cero, entonces

$$p = 105\ kg/cm^2$$

Problema 1.13
Realizar un gráfico que represente la altura capilar, h en función del diámetro interno D, de un tubo circular para agua destilada a 40 °C. Cuál es la altura capilar si el diámetro interior del tubo es de 6 mm.
Suponer que el ángulo de contacto entre el vidrio y el agua es de 0°



En las tablas correspondientes a las propiedades físicas del agua se obtiene $\sigma = 0.7121 \times 10^{-2}$ kg/m y el peso específico $\gamma = 993.00$ kg/m^3

La fuerza vertical que eleva la columna capilar debido a la tensión superficial es

$$F_{V1} = \sigma \pi D \cos \theta$$

El peso de la columna de líquido que se encuentra en el tubo capilar es igual al peso específico del líquido multiplicado por el volumen; es decir,

$$W = \gamma \frac{\pi}{4} D^2 h$$

La condición de equilibrio vertical es

$$F_{V1} = W$$

$$\sigma \pi D \cos \theta = \gamma \frac{\pi}{4} D^2 h$$

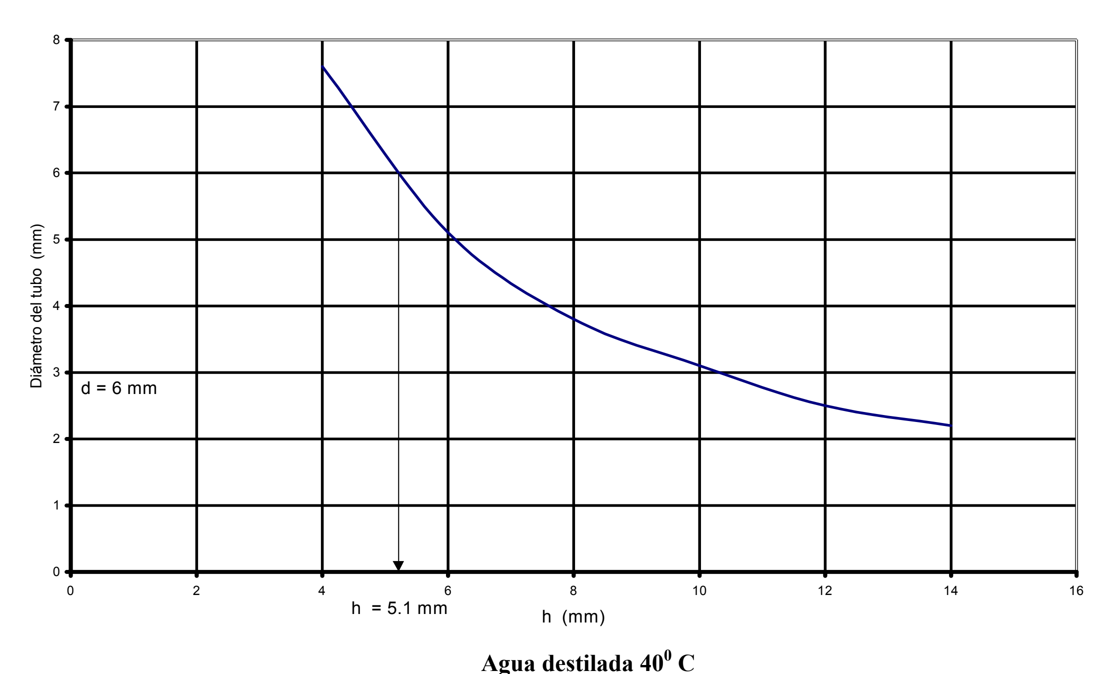
$$h = \frac{4\,\sigma \cos\theta}{\gamma\, D}$$

que al sustituir los valores numéricos resulta

$$h = \frac{4 \times 0.7128 \times 10^{-2} \cos 0^0}{933.00\, D}$$

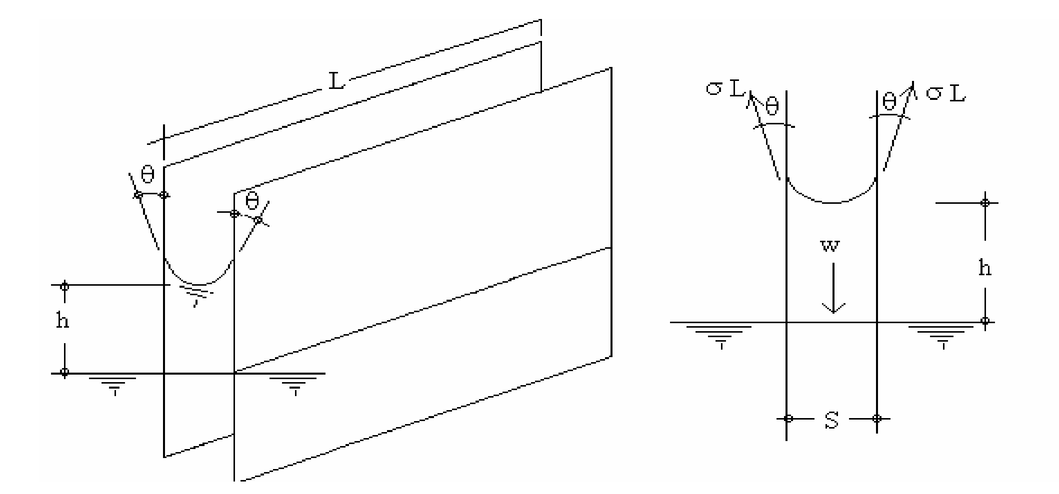
Simplificando resulta

$$h = \frac{3.056 \times 10^{-5}}{D}$$



Agua destilada 40^0 C

Problema 1.14
Desarrollar una expresión para calcular la altura de ascenso capilar entre dos placas paralelas de longitud L y separación S. Despreciar los efectos extremos. Determinar h, si la separación entre las placas es 1 mm, la tensión superficial σ es 0.00284 kg/m y el ángulo de contacto entre la placa y el agua es de 10^0



La fuerza vertical que eleva la columna capilar debido a la tensión superficial es

$F_{V1} = 2\ \sigma\ L \cos\theta$

El peso de la columna de líquido que se encuentra entre las placas separadas una distancia S es igual al peso específico del líquido multiplicado por el volumen; es decir,

$W = \gamma\ h\ L\ S$

La condición de equilibrio vertical es

$F_{V1} = W$

$2\ \sigma\ L \cos\theta = \gamma\ h\ L\ S$

$$h = \frac{2\ \sigma \cos\theta}{\gamma\ S}$$

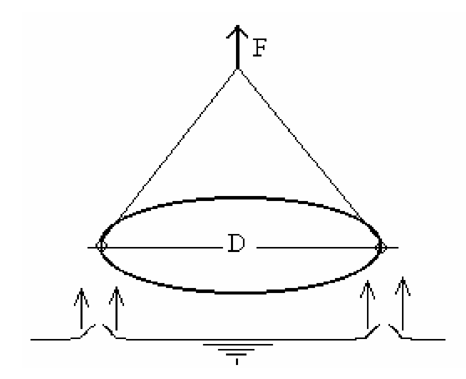
Al sustituir los valores numéricos se obtiene,

$$h = \frac{2 \times 0.00284 \times \cos 10^0}{0.001 \times 1000}$$

$h = 0.0056$ m

$h = 0.56$ cm

Problema 1.15
Calcular la fuerza necesaria para retirar un anillo de alambre de platino de 25 mm de diámetro de la superficie del agua la cuál tiene una tensión superficial σ de 0.00743 kg/m y un ángulo de contacto de 0^0, despreciar el peso del anillo.



La fuerza producida por la tensión superficial es igual a la tensión superficial multiplicada por 2 veces el perímetro del anillo y por el coseno del ángulo; es decir,

$F = 2\ \sigma\ \pi\ D \cos\theta$

$F = 2 \times 0.00743 \times 3.14159 \times 0.025$

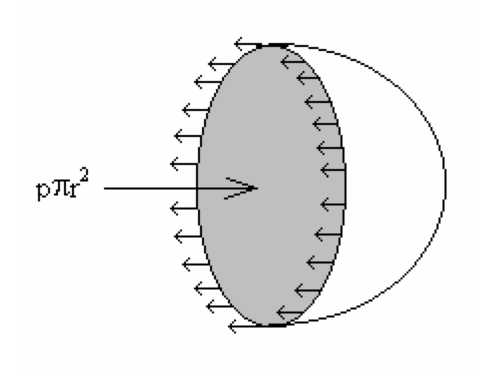
$F = 1.17 \times 10^{-3}$ kg

Para poder levantar el anillo hay que aplicar una fuerza hacia arriba e igual a la calculada anteriormente; es decir,

$F = 0.00117$ kg

Problema 1.16

Cuál es la presión absoluta en el interior de una gota de agua de 0.05 mm de diámetro a 20º C, si en el exterior de la gota existe la presión atmosférica normal de 1.033 kg/cm^2



Con una temperatura de 20^0 C se obtiene en la tabla de propiedades físicas del agua

$\sigma = 0.00745$ kg/m

La fuerza producida por la tensión superficial es

$F_1 = 2\pi\, r\, \sigma$

La fuerza producida por la presión relativa en el interior de la gota es igual a la presión multiplicada por la proyección del área; es decir,

$F_2 = p\, \sigma\, r^2$

Para que se mantenga el equilibrio

$F_1 = F_2$

$2\pi\, r\, \sigma = p\, \sigma\, r^2$

$$p = \frac{2\,\sigma}{r}$$

y al sustituir se obtiene

$$p_1 = \frac{2 \text{ x } 0.00745}{0.00025} 10^4$$

$p_1 = 0.0596$ kg/cm^2

$p_{atmósfera} = 1.033$ kg/cm^2

$p_{interior} = p_{atmósfera} + p_1$

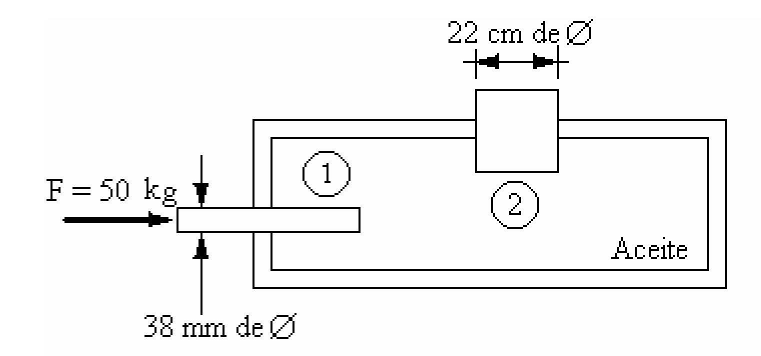
$p_{interior} = 1.033$ kg/cm^2 + 0.0596 kg/cm^2

$p_{interior} = 1.0926$ kg/cm^2

Capítulo 2

HIDROSTATICA

Problema 2.1
Determinar el peso W, que puede sostenerse con una fuerza de 50 kg aplicados en el pistón que se muestra en la figura.



Si el desnivel entre el punto 1 y el punto 2 es cero o despreciable se puede considerar $p_1 = p_2$

Por definición, la presión en el punto 1 es

$$p_1 = \frac{F}{A_1} = \frac{F}{\frac{\pi \phi_1^2}{4}} = \frac{4F}{\pi \phi_1^2}$$

y la presión en el punto 2 es

$$p_2 = \frac{W}{A_2} = \frac{W}{\frac{\pi \phi_2^2}{4}} = \frac{4W}{\pi \phi_2^2}$$

Al igualar y despejar se obtiene

$$\frac{4F}{\pi \phi_1^2} = \frac{4W}{\pi \phi_2^2}$$

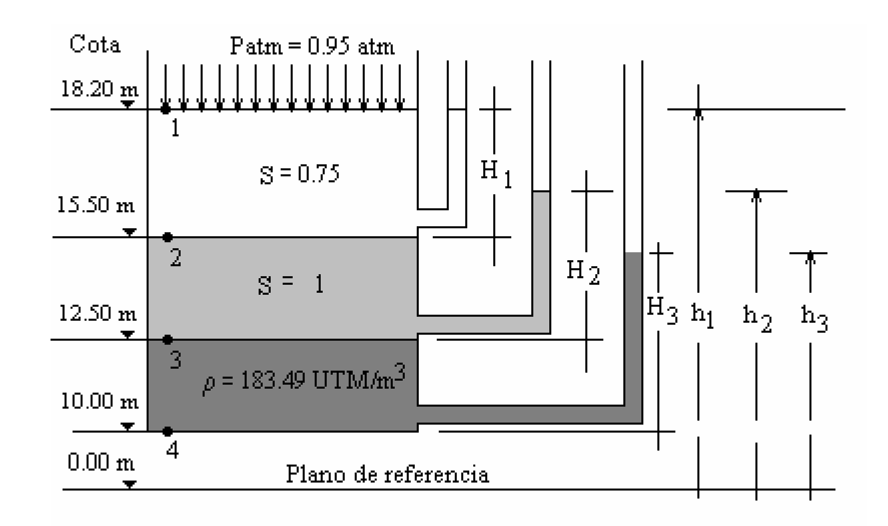
$$W = \left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)^2 F$$

y al sustituir los valores numéricos, resulta

$$W = \left(\frac{22\,\text{cm}}{3.8\,\text{cm}}\right)^2 50\,\text{kg}$$

W = 1675.40 kg

Problema 2.2
En el tanque de la figura tenemos tres líquidos no miscibles. Calcular las presiones absoluta y relativa en el fondo y determinar la cota de los líquidos en cada uno de los piezómetros colocados como se indica. Considerar que la presión atmosférica es 0.95 atm.



Determinación de las presiones relativas en los puntos 1, 2, 3, y 4.
La presión relativa en el punto 1, superficie libre, en contacto con la atmósfera es

$p_1 = 0 \qquad = 0 \text{ kg/m}^2.$

$p_2 = p_1 + \gamma_1 (z_1 - z_2)$

Como $\gamma_1 = S_1\, \gamma_{agua}$, al sustituir se obtiene

$p_2 = 0 + 0.75 \times 1000\,(18.20 - 15.50) \qquad = 2025 \text{ kg/m}^2$

$p_3 = p_2 + \gamma_2 (Z_2 - Z_3)$

$p_3 = 2025 + 1 \times 1000\,(15.50 - 12.50) \qquad = 5025 \text{ kg/m}^2$

$p_4 = p_3 + \gamma_3 (z_3 - z_4)$

Como $\gamma_3 = \rho_3 \times g$, al sustituir se obtiene

$p_4 = 5025 + (183.49 \times 9.81) \times (12.50 - 10.00) = 9525 \text{ kg/m}^2$

Como $\quad 1 \text{ atm} \quad = \; 10330 \text{ kg/m}^2$

Entonces $\quad 0.95 \text{ atm} \; = \; X \qquad \Rightarrow \qquad X = \; 9813.5 \text{ kg/m}^2$

La presión absoluta en el fondo (punto 4) es

$p_{abs} = p_{man} + p_{atms\ local}$ que al sustituir se obtiene

$p_{abs4} = 9525 + 9813.5 = 19338.5\ kg/m^2$

Las alturas de los piezómetros son y las cotas de los piezometros son

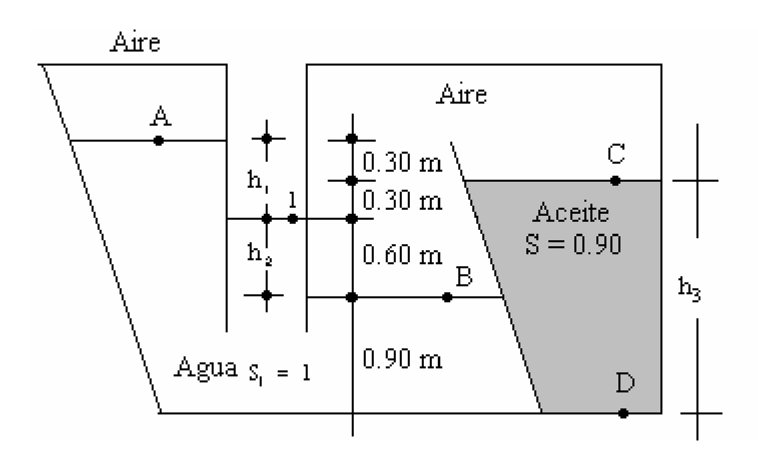
$p = \gamma H \rightarrow H = \frac{p}{\gamma}$

$H_1 = \frac{p_2}{\gamma_1} = \frac{2025}{750} = 2.70\ m$ $h_1 = 2.70 + 15.50 = 18.20\ m$

$H_2 = \frac{p_3}{\gamma_2} = \frac{5025}{1000} = 5.03\ m$ $h_2 = 5.03 + 12.50 = 17.53\ m$

$H_3 = \frac{p_4}{\gamma_3} = \frac{9525}{1800} = 5.29\ m$ $h_3 = 5.29 + 10.00 = 15.29\ m$

Problema 2.3
Calcular la presión en A, B, C y D en kg/cm^2.



$p_1 = 0$, (Por estar en contacto con la atmósfera)

$p_A = p_1 - \gamma_1\, h_1$

La presión en A es menor que la presión en 1 ya que el punto A se encuentra por encima del punto 1.

$p_A = 0 - 0.6 \times 1000 = -600 \text{ kg/m}^2 \Rightarrow p_A = -600 \times 10^{-4} = -0.06 \text{ kg/cm}^2$

$p_B = p_1 + \gamma_1 h_2$

La presión en B es mayor que la presión en 1 ya que el punto B se encuentra por debajo del punto 1.

$p_B = 0 + 0.6 \times 1000 = 600 \text{ kg/m}^2 \Rightarrow p_B = 600 \times 10^{-4} = 0.06 \text{ kg/cm}^2$

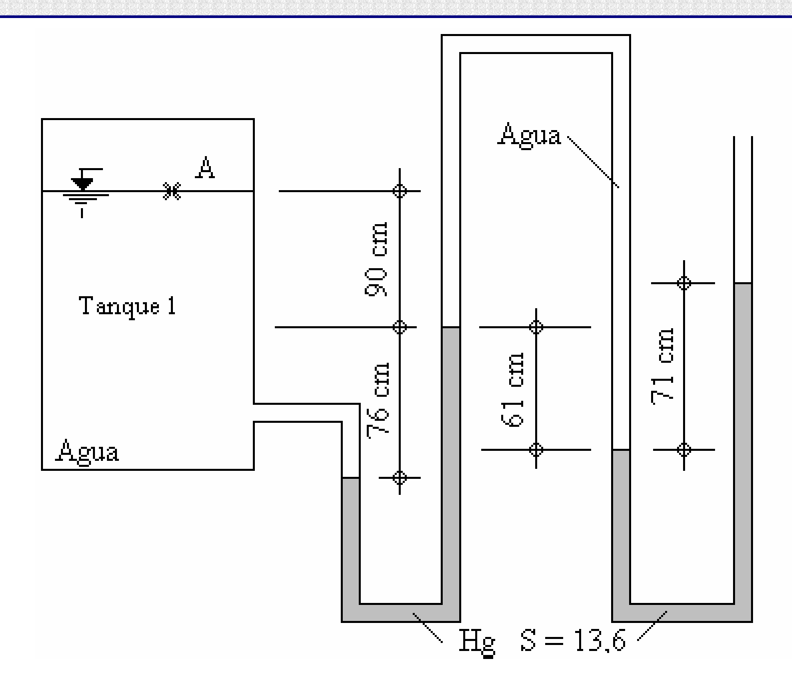
$p_C = p_B$ (por ser aire, la presión se mantiene, aproximadamente constante en toda la cámara)

$p_C = 0.06 \text{ kg/cm}^2$

$p_D = p_C + \gamma_2 h_3$

$p_D = 600 + 0.9 \times 1000 \times 1.80 = 2200 \text{ kg/m}^2 \Rightarrow p_D = 2200 \times 10^{-4} = 0.22 \text{ kg/cm}^2$

Problema 2.4
Calcular la presión absoluta y manométrica en el tanque 1 , sobre la superficie del agua. Considerar que la presión barométrica es de 710 mm de Hg.



Moviéndose a lo largo del piezómetro, de derecha a izquierda y considerando presión relativa, se obtiene hasta llegar al punto A

$0 + 0{,}71 \times 13600 - 0{,}61 \times 1000 + 0{,}76 \times 13600 - 0{,}76 \times 1000 - 0{,}9 \times 1000 = p_A$

$p_A = 9656 - 610 + 10336 - 760 - 900$

$p_A = 17722$ kg/m^2 (relativa o manométrica)

Como 760 mmHg = 10330 kg/m^2

Entonces 710 mmHg = X kg/m^2 $\Rightarrow X = \frac{710 \times 10330}{760} = 9650$ kg/m^2.

Como la presión absoluta en un punto es

$p_{abs} = p_{relativa} + p_{atmosférica}$, se tiene

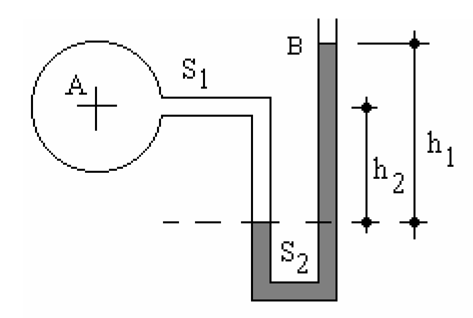
$p_{abs} = 9650 + 17722 = 27372$ kg/m^2

Problema 2.5

En la figura $S_1 = 0.86$, $S_2 = 1$, $h_1 = 43$ cm, $h_2 = 21$ cm,.

a) Determinar la presión manométrica p_A en cm de Hg.

b) Si la lectura del barómetro es 750 mm de Hg. ¿Cuál es la presión absoluta en A en m de agua?



a) Moviéndose a lo largo del piezómetro de izquierda a derecha y considerando presión relativa, se obtiene hasta llegar al punto B.

$p_A + h_2 S_1\gamma - h_1 S_2\gamma = 0$

Al despejar se obtiene

$p_A = \gamma (h_1 S_2 - h_2 S_1)$

que al sustituir resulta

$p_A = 1000$ kg/m^3 $(0.43 \times 1.00 - 0.21 \times 0.86) = 249.40$ kg/m^2

Como 1.033 kg/cm^2 = 76 cmHg

Entonces 0.02494 kg/cm^2 = X $\Rightarrow$ X = 1.83 cmHg.

b) Presión absoluta en m de agua

$p_{abs} = p_{bar} + p_{man}$

$p_{abs} = 750 + 18.3 = 768.30$ mm Hg

Como 10.33 m = 760 mm Hg

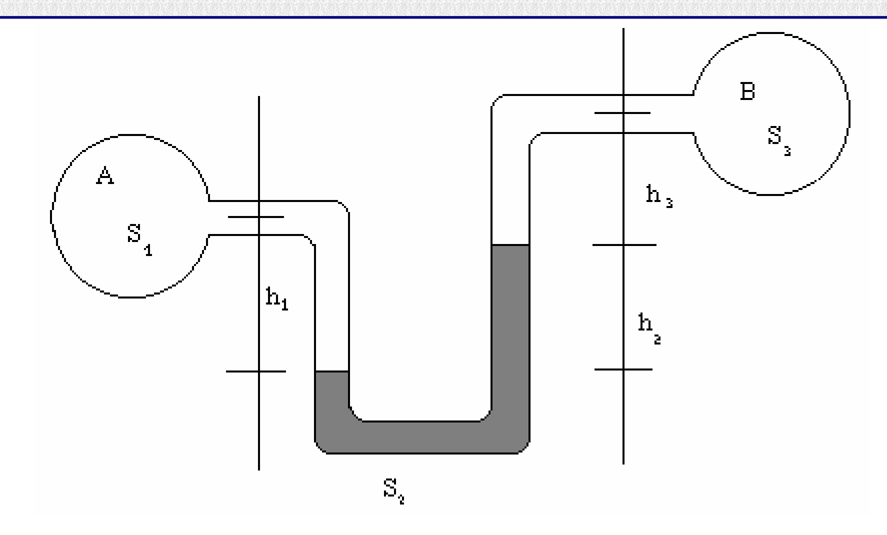
Entonces X = 768.30 mm Hg $\Rightarrow$ X = 10.44 m de agua

Problema 2.6

En la figura que se muestra se tienen los siguientes datos: $S_1 = S_3 = 0.83$, $S_2 = 13.6$, $h_1 = 40$ cm, $h_2 = 20$ cm, $h_3 = 30$ cm. Determinar:

a) p_A si $p_B = 0.7$ kg/cm^2 (manométrica)

b) p_B en metros de agua si, $p_A = 1,4$ kg/cm^2 (Absoluta) y una lectura barométrica de 740 mm de Hg.



a) Para una presión en $p_B = 0.7$ kg/cm^2 $\Rightarrow p_B$ 0.7×10^4 kg/m^2

Se obtiene desde el punto A hasta el punto B, a través, del manómetro diferencial:

$$p_A + S_1\,\gamma_1\,h_1 - S_2\,\gamma_2\,h_2 - S_3\,\gamma_3\,h_3 = 0.7 \times 10^4$$

Despejando se obtiene

$p_A = 0.7 \times 10^4 + \gamma (S_2 h_2 + S_3 h_3 - S_1 h_1)$

que al sustituir, en el sistema métrico técnico, se obtiene

$p_A = 0.7 \times 10^4 + 1000 (13.6 \times 0.20 + 0.83 \times 0.30 - 0.83 \times 0.40)$

$p_A = 9637 \text{ kg/m}^2$

b) Para $p_A = 1.40 \text{ kg/cm}^2$ (absoluta) $\Rightarrow 1.40 \times 10^4 \text{ kg/m}^2$

Se obtiene desde el punto B hasta el punto A, a través, del manómetro diferencial

$p_B + \gamma (S_3 h_3 + S_2 h_2 - S_1 h_1) = p_A$

$p_B = p_A - \gamma (S_3 h_3 + S_2 h_2 - S_1 h_1)$

que al sustituir, en el sistema métrico técnico, se obtiene:

$p_B = 1.40 \times 10^4 - 1000 (0.83 \times 0.30 + 13.6 \times 0.20 - 0.83 \times 0.40)$

$p_B = 1.136 \times 10^4 \text{ kg/m}^2$ (absoluta) $\Rightarrow 1.136 \text{ kg/cm}^2$

Como 760 mm Hg equivalen a 1.033 kg/cm^2, se obtiene que la presión atmosférica es

$$p_{atm} = \left(\frac{740}{760}\right) 1.033 = 1.005 \text{ kg/cm}^2$$

La presión absoluta es

$p_{abs} = p_{rel} + p_{atm}$

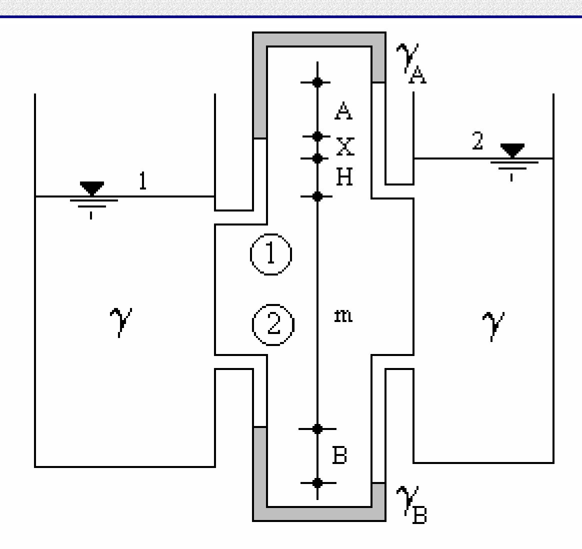
Despejando y sustituyendo se obtiene

$p_{rel} = 1.136 - 1.005 = 1.131 \text{ kg/cm}^2$

Como 1 kg/cm^2 equivalen a 10 m de agua se obtiene que la presión relativa es

$$p_{B(rel)} = \left(\frac{10}{1}\right) \times 0.131 = 1.31 \text{ m de agua}$$

Problema 2.7
Dos recipientes cuyas superficies libres se encuentran a una diferencia de altura H, contienen el mismo líquido de peso específico γ según se indica en la figura. Encuentre una expresión para calcular γ en función de γ_a, A, γ_B, B.



A través del manómetro superior, desde el punto 1 hasta el punto 2 se obtiene

$$0 - \gamma H - \gamma X - \gamma_A A + \gamma A + \gamma X = 0$$

Simplificando se obtiene

$$-\gamma H - \gamma_A A + \gamma A = 0$$

A través del manómetro inferior, desde el punto 1 hasta el punto 2, se obtiene

$$0 + \gamma m + \gamma_B B - \gamma B - \gamma m - \gamma H = 0$$

Simplificando se obtiene

$$\gamma_B B - \gamma B = \gamma H$$

Al despejar, se obtiene el valor del desnivel H

$$H = \frac{\gamma_B B - \gamma B}{\gamma}$$

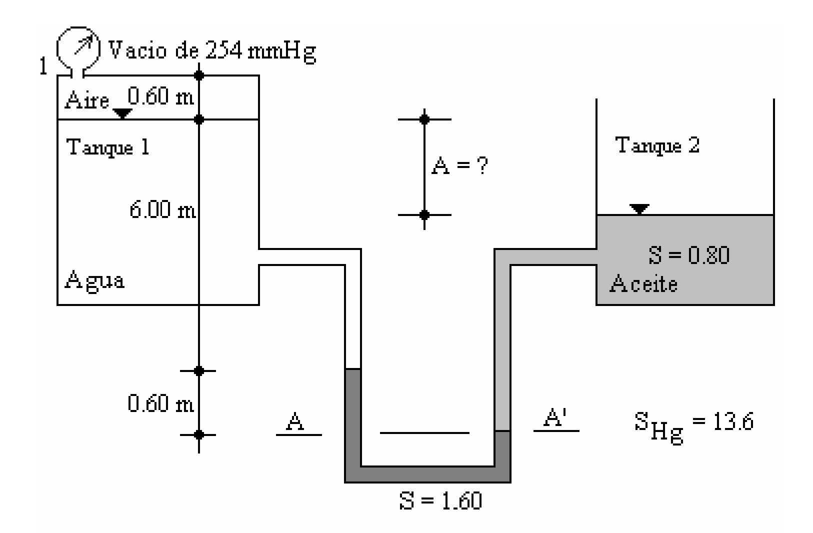
Al sustituir el valor de H en la expresión obtenida del manómetro superior, se obtiene

$$-\gamma\left(\frac{\gamma_B B - \gamma B}{\gamma}\right) - \gamma_A A + \gamma A = 0$$

Al simplificar

$$\gamma = \frac{\gamma_B B + \gamma_A A}{A + B}$$

Problema 2.8
Calcular el desnivel, A, que existe entre los tanques mostrados en la figura .



La presión relativa, del aire confinado, en la parte superior del tanque 1 en kg/m^2, se puede determinar mediante la lectura del manómetro así

$p_1 = \gamma_{Hg}\ h = 13600\ (-0.254) = -3450\ kg/m^2$

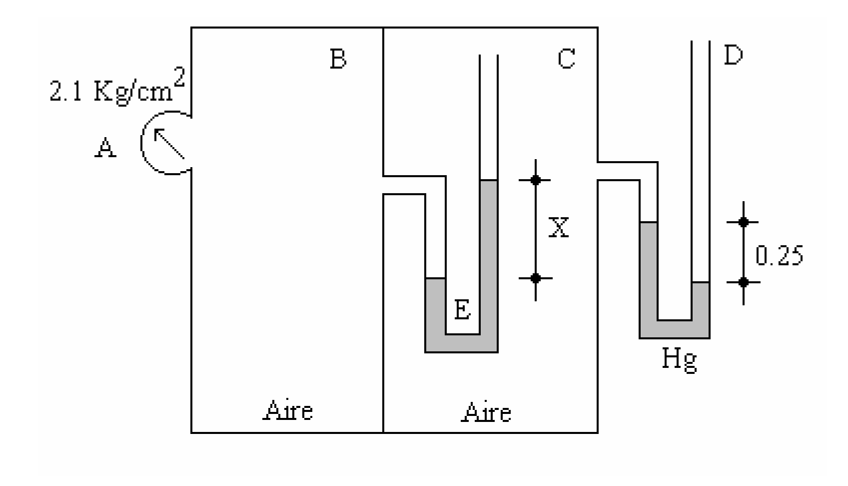
Moviéndose a lo largo del manómetro diferencial, del tanque 1 hasta el tanque 2, se tiene:

$-3450 + 1000 \times 6.00 + 1.60 \times 1000 \times 0.60 - 0.80 \times 1000\ (6.60 - A) = 0$

y al despejar se obtiene

A = 2.22 m

Problema 2.9
Los compartimentos B y C están cerrados y llenos de aire. La lectura barométrica es 1.020 kg/cm^2, cuando los manómetros A y D marcan la lectura indicada. Qué valor tendrá X en el manómetro E el cual contiene mercurio (S = 13.59).

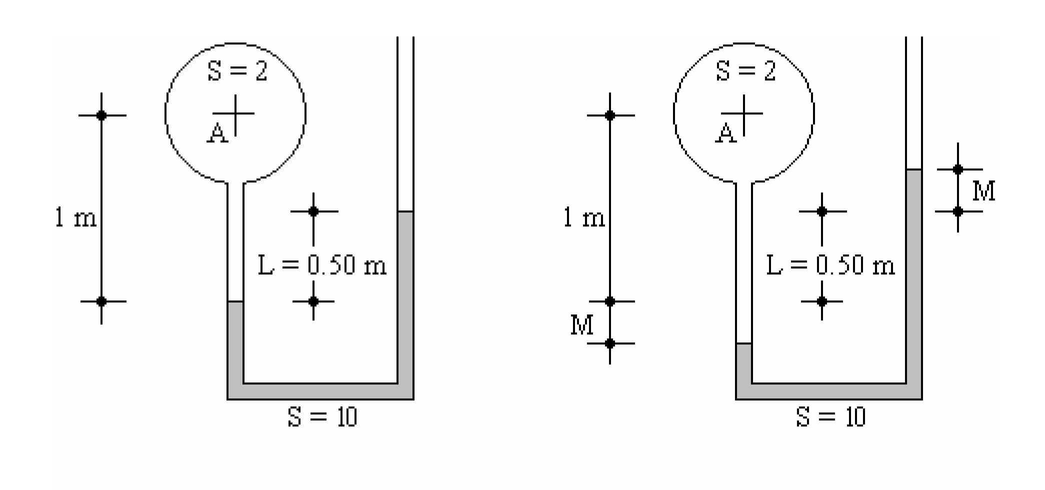


Considerando presiones relativas y moviéndose desde el manómetro A hasta el manómetro D se obtiene

$2.1 \times 10^4 - 13590\, X + (0.25)\,(13590) = 0$

$X = 1.80$ m

Problema 2.10
El manómetro que se muestra en la figura se encuentra en equilibrio. Si la presión en A aumenta en un 50%, respecto a la inicial, determinar la nueva lectura manométrica.



Condición inicial Condición final

Para la condición inicial, moviéndose de izquierda a derecha se obtiene:

$p_A + (2 \times 1000)\, 1.00 - (10 \times 1000)\, 0.50 = 0$

$p_A = 3000$ kg/m^2

Al aumentar la presión en un 50%, es decir, $\frac{50}{100} = 0.50$ se tiene para esta nueva condición:

Nueva presión en A = 3000 + 0.50 (3000) = 4500 kg/m^2

Ahora, el líquido manométrico en la rama de la izquierda baja una distancia M, y en consecuencia, sube en la rama de la derecha la misma distancia M, debido a que el diámetro del piezómetro es constante, obteniéndose

$4500 + (2 \times 1000)\,(1.00 + M) - (0.50 + 2M)\,(10 \times 1000) = 0$

simplificando se obtiene

2000 M – 20000 M = 5000 – 2000 – 4500

– 18000 M = – 1500

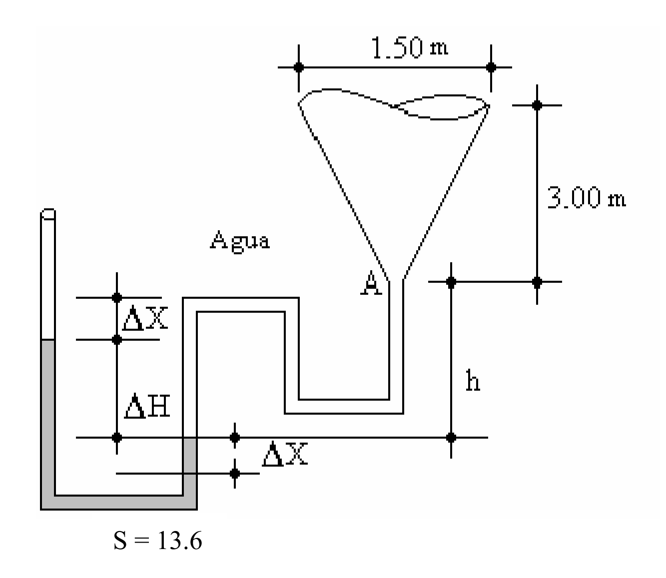
M = 0.08 m

La nueva lectura es la lectura inicial más dos veces la altura M así

Nueva Lectura = 0.50 + 2 x 0.08 = 0.66 m

Problema 2.11

Cuando el embudo está vacío y la altura de agua alcanza el punto A el desnivel del manómetro es ΔH = 150 mm. Calcular el desnivel del manómetro cuando el embudo se encuentra completamente lleno de agua.



S = 13.6

a) Para la condición inicial, moviéndose de izquierda a derecha se obtiene

(13.6 x 1000) ΔH – 1000 x h = 0

Como ΔH = 150 mm = 0.150m se tiene al sustituir y despejar

h = 2,04 m (desnivel inicial)

b) Para la condición final el embudo se llena de agua, la presión en A no depende del tamaño del embudo, ni de la forma de este recipiente, solamente depende de la altura y del tipo del líquido.

Al llenar el embudo, el líquido manómetrico baja ΔX en la rama de la derecha, y sube ΔX en la rama de la izquierda, así moviéndose de izquierda a derecha a través del piezómetro se obtiene

(13.6 x 1000) (ΔH + 2ΔX) – 1000 (ΔX + h + 3.00) = 0

al sustituir los valores obtenemos

$(13.6 \times 1000)(0.15 + 2\Delta X) - 1000(\Delta X + 2.04 + 3.00) = 0$

$\Delta X = 0{,}1145$ m.

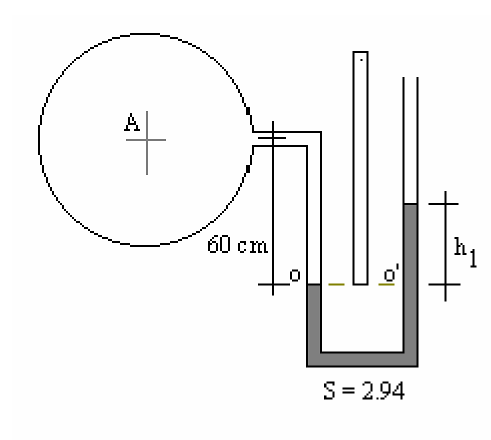
El nuevo desnivel es $2\Delta X + \Delta H$

sustituyendo el valor de ΔX calculado, se obtiene

El nuevo desnivel

$2(0.1145) + 0.15 = 0.38$ m.

Problema 2.12
En el esquema que se muestra en la figura, A contiene agua y el fluido manométrico tiene una densidad relativa de 2.94. Cuando el menisco de la izquierda coincide con el cero de la escala, p_A = 10 cm de agua. Determinar la lectura del menisco de la derecha para p_A = 0.07 kg/cm^2 (man) cuando no se ajusta el tubo a la escala.



a) Para la condición inicial, cuando la presión en A es 10 cm de agua, se obtiene moviéndose a través del manómetro, de izquierda a derecha

$p_A + \gamma_{agua}\, h_{agua} - (S\, \gamma_{agua})\, h_1 = 0$

al sustituir los valores numéricos se obtiene

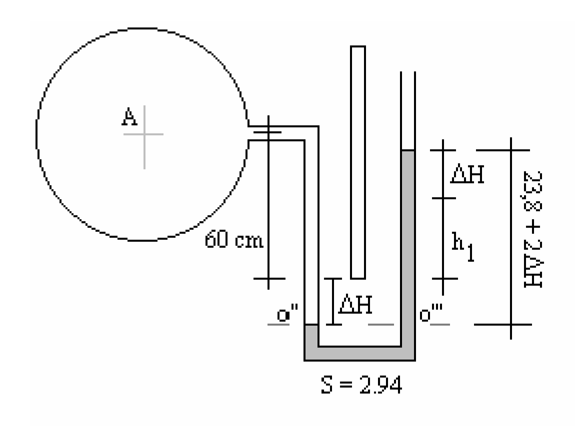
$1.000 \times 0.10 + 1000 \times 0.60 - (2.94 \times 1000)\, h_1 = 0$

de donde,

$h_1 = 0.238$ m

b) Para la condición final, cuando la presión en A es 0.07 kg/cm^2, se obtiene moviéndose a través del manómetro de izquierda a derecha

$p'_A + \gamma_{agua}(h_{agua} + \Delta H) - (2.94 \times 1000)(h_1 + 2\Delta H) = 0$



al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$0.07 \times 10^4 + 1000\,(0.238 + \Delta H) - (2.94 \times 1000)\,(0.238 + 2\,\Delta H) = 0$$

de donde,

$\Delta H = 0.123$ m

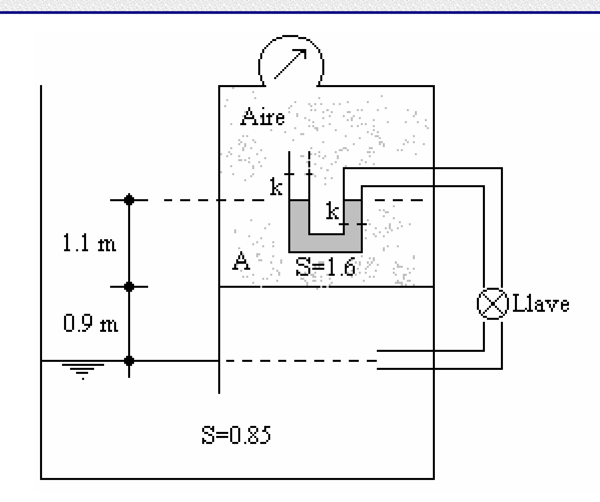
Como la escala y el tubo manométrico están fijos la nueva lectura será:

Nueva lectura es

0.238 + 0.123 = 0.361 m

Problema 2.13

Cuando la llave esta cerrada, el manómetro de Bourdon o de aguja indica una presión p_A. Calcular la diferencia entre las ramas del manómetro un U cuando se abre la llave, suponiendo que los niveles del líquido permanece constante..



cuando la llave está cerrada, la presión en A se puede calcular como

$p_A = (S\ \gamma_{agua})\ (-\ h_1)$

$p_A = (0.85 \times 1000)\ (-\ 0.90) = -\ 765.00\ kg/m^2$

Al abrir la llave, el líquido en las ramas del manómetro se mueve. Supongamos que en la rama de la derecha el líquido baja una distancia k y en la rama de la izquierda el líquido sube una distancia k; moviéndose a través del manómetro se tiene

$0 - (0.85 \times 1000)\ (1.1 + 0.9 - k)\ -\ (1.6 \times 1000)\ (2k)\ =\ -\ 765.00$

de donde,

$k = -\ 0.40\ m$

El signo negativo, del resultado obtenido a través de los cálculos, indica que ocurre lo contrario de lo asumido, es decir, el líquido en la rama de la derecha sube una distancia k y en la rama de la izquierda baja distancia k.

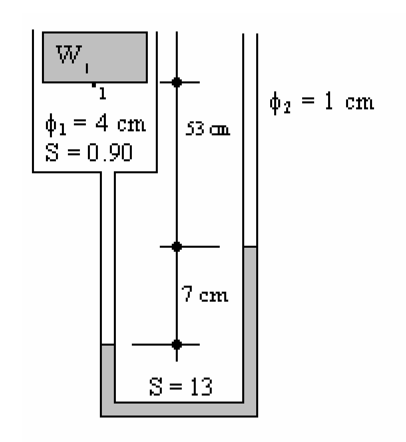
La diferencia entre ramas es

$2\ k = 2(0.40) = 0.80\ m$

Problema 2.14

Para el esquema que se muestra en la figura se pide:

a) Peso del cilindro W_1 si la diferencia entre las ramas de mercurio es de 7.00 cm.
b) Cuánto será la diferencia entre las ramas de mercurio, considerando una densidad relativa de 13, si sobre el cilindro W_1 se coloca un peso W igual a 0.535 kg.



a) Para la condición inicial

$p_1 = (13 \times 1000) \times 0.07\ -\ (0.9 \times 1000)\ (0.53 + 0.07)$

$p_1 = 370\ kg/m^2$

La presión producida por el émbolo de peso W_1 es

$$p_1 = \frac{W_1}{A_1} \quad \Rightarrow \quad W_1 = p_1 \frac{\pi}{4} \Phi_1^2$$

Al sustituir los valores numéricos se tiene

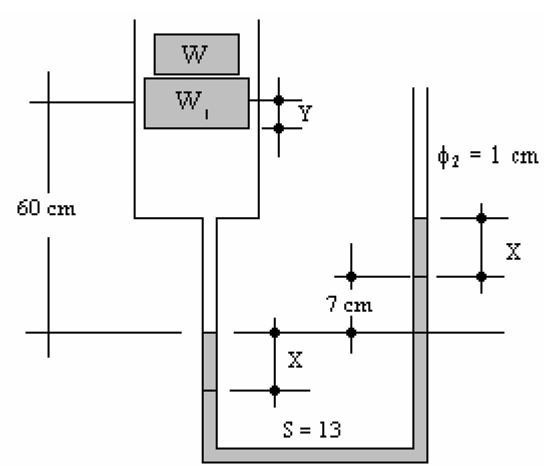
$$W_1 = 370 \text{ x } \frac{\pi}{4} \text{ x } 0.04^2 = 0.465 \text{ kg}$$

b) Para la condición final, la nueva presión producida por el émbolo es

$$p_1' = \frac{W + W_1}{A_1} = \frac{0.456 + 0.535}{\frac{\pi}{4} 0.04^2} = 796 \text{ kg/m}^2$$

Al colocarse el peso W sobre el embolo, éste baja una distancia Y, y en consecuencia, el líquido en la rama de la derecha del manómetro sube una distancia X. Como estos volúmenes son iguales se tiene

$$\frac{\pi}{4} 0.04^2 \text{ Y} = \frac{\pi}{4} 0.01^2 \text{ X} \qquad \Rightarrow \qquad \text{Y} = 0.063 \text{ X}$$



Moviéndose a través del manómetro de izquierda a derecha se obtiene

$$796 + (0.90 \text{ x } 1000)(0.60 - \text{Y} + \text{X}) - (13 \text{ x } 1000)(2\text{ X} + 0.07) = 0$$

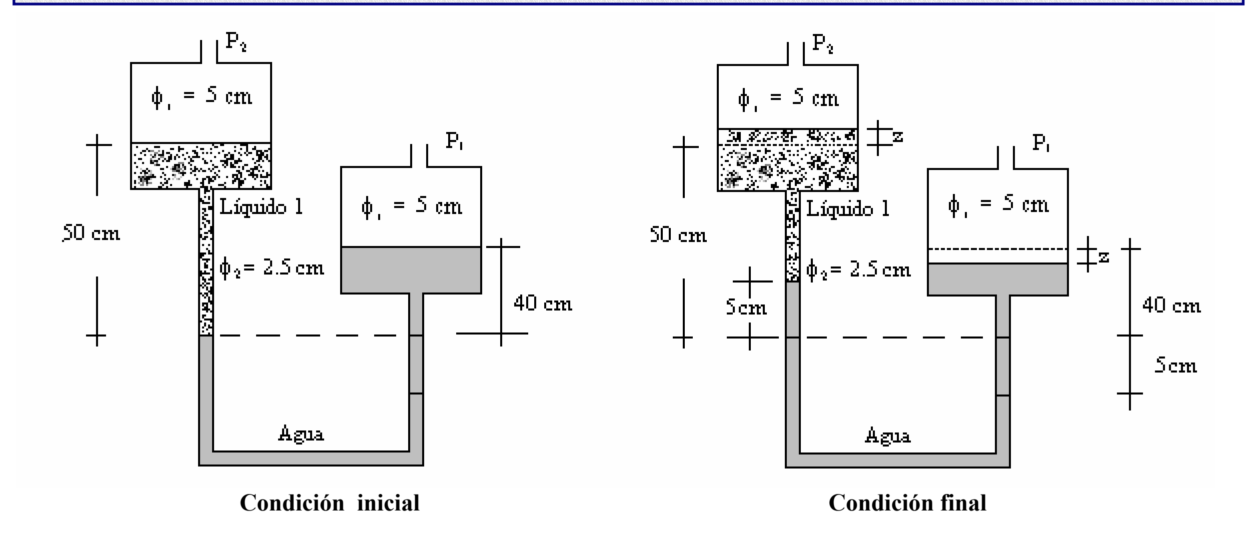
de donde,

$$\text{X} = 0.02 \text{ m}$$

Como la diferencia de lecturas es igual a la lectura inicial más dos veces la distancia X, obtenemos

Diferencia de lecturas = 0.07 + 2 x 0.02 = 0.11 m

Problema 2.15
Cuando $p_1 = p_2$ el manómetro se encuentra en la posición inicial mostrada en la figura. Calcular la diferencia de presiones $p_1 - p_2$ si el menisco de la izquierda (línea entre líquidos) sube 5 cm.



Condición inicial **Condición final**

a) Para la condición inicial y moviéndose de izquierda a derecha a través del manómetro se obtiene

$p_2 + 0.50\,\gamma_1 - 0.40 \times 1000 = p_1$

Para este caso como $p_1 = p_2$ la expresión anterior se transforma en

$0.50\,\gamma_1 - 0.40 \times 1000 = 0$

de donde,

$$\gamma_1 = \frac{400}{0.50} = 800 \text{ kg/m}^3$$

b) Para la condición final, al subir el menisco de la izquierda 5 cm la superficie del líquido 1 sube en la cámara izquierda una distancia Z y baja en la cámara de la derecha una distancia Z, entonces

$p_2 + (0.50 - 0.05 + Z)\,800 + (0.05 + 0.05)\,1000 - (0.40 + 0.05 - Z)\,1000 = p_1$

$p_2 - p_1 = (0.45 + Z) \times 800 - (0.35 - Z) \times 1000$

Como el volumen del líquido en la rama de la izquierda entra en la cámara superior, subiendo una distancia Z, entonces estos volúmenes son iguales, es decir

$$\frac{\pi}{4}\,0.05^2\,Z = \frac{\pi}{4}\,0.025^2 \times 0.05 \qquad \Rightarrow \qquad Z = 0.0125 \text{ cm}$$

Sustituyendo el valor de Z, se tiene

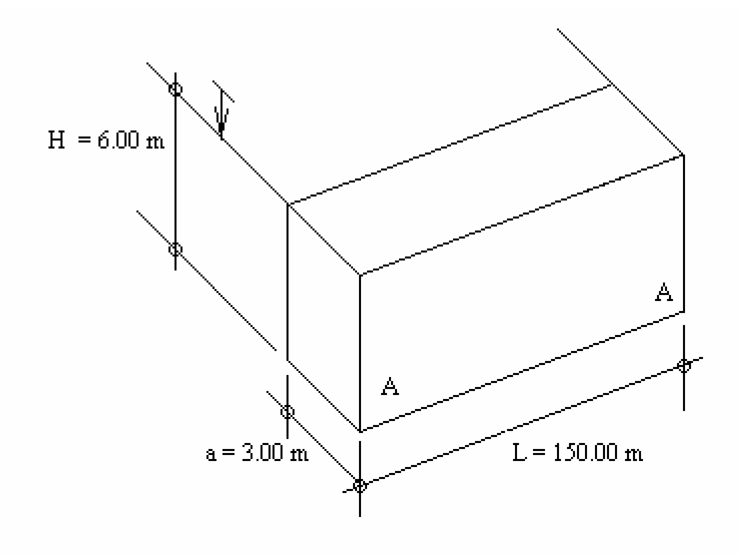
$p_2 - p_1 = (0.45 + 0.0125) \times 800 - (0.35 - 0.0125) \times 1000 = 32.50 \text{ kg/m}^2$

Problema 2.16

La sección transversal de una presa es un rectángulo de 3 m. de ancho y 6 m. de alto. La profundidad del agua situada tras la presa es de 6 m. y la longitud de 150 m.

a) Cuál es el momento del par que tiende a volcar la presa.

b) Si el material de que está hecha la presa tiene un peso específico de 1700 kg/m^3, determinar si el par estabilizador debido al peso tiene un momento mayor o menor que el debido a la acción del agua.



a) Determinación del momento al volcamiento

La fuerza, según el diagrama es

$$F = \frac{1}{2} \gamma H^2 L$$

El brazo respecto a eje AA es

$$B = \frac{1}{3} H$$

Luego el momento será

$$M_1 = F \times B = \frac{1}{6} \gamma H^3 L$$

Al sustituir se obtiene que el momento al volcamiento es

$$M_1 = \frac{1}{6} \times 1000 \times 6^3 \times 150 = 54 \times 10^5 \text{ kg m}$$

b) Determinación del momento estabilizador

El peso de la presa es

$W = 3 \times 6 \times 150 \times 1700 = 459 \times 10^4$ kg.

El brazo respecto al eje AA es

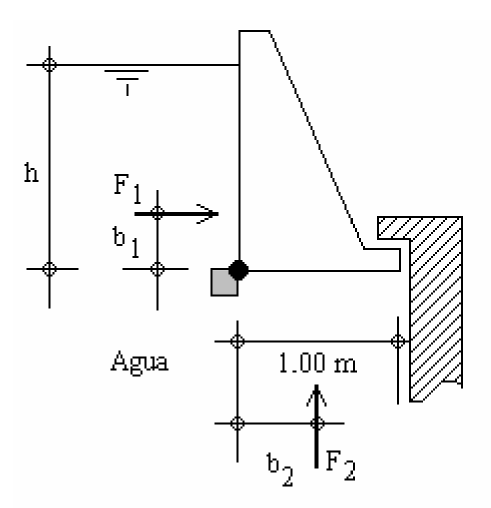
$$b = \frac{1}{2} a = \frac{3}{2} = 1.50 \text{ m}$$

Luego el momento estabilizador es

$M_2 = W b = 459 \times 10^4 \times 1.5 = 68.85 \times 10^5$ kg m

como $M_2 = 68.85 \times 10^5$ kg · m > $M_1 = 54 \times 10^5$ kg m, la presa es estable y no se produce el volcamiento.

Problema 2.17
Si se considera que la compuerta, cuya sección transversal se muestra en la figura, no tiene peso, cual será la altura de agua, h, para la cual ella se abre?



La fuerza horizontal sobre la superficie vertical y su brazo son respectivamente,

$$F_1 = \frac{1}{2} \gamma h^2 L = \frac{1}{2} 1000 \times h^2 \times L = 500 h^2 L \qquad \text{y} \qquad b_1 = \frac{1}{3} h$$

La fuerza vertical sobre la superficie horizontal y su brazo son respectivamente,

$$F_2 = \gamma \times h \times 1 \times L = 1000 h L \qquad \text{y} \qquad b_2 = \frac{1}{2} = 0.50 \text{ m}$$

La condición de equilibrio indica

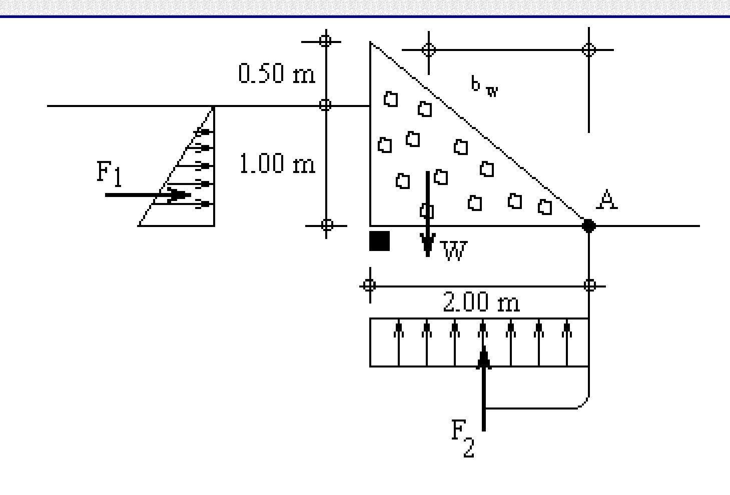
$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad F_1 b_1 - F_2 b_2 = 0$$

$$500\ h^2\ L \times \frac{1}{3}\ h\ =\ 1000\ h\ L \times 0.50$$

Al despejar se obtiene

$$h\ =\ \sqrt{3}\ =\ 1.73\ \ m$$

Problema 2.18
Calcular el peso W para que la compuerta articulada en A, se mantenga en equilibrio. El ancho de la misma es de 2.00 m



La fuerza sobre la superficie vertical, según el diagrama de presiones es

$$F_1\ =\ \frac{1}{2}\ 1000 \times 1^2 \times 2\ =\ 1000\ kg$$

y su brazo respecto al eje de rotación A es

$$b_1 = \frac{1}{3} 1.00\ =\ \frac{1}{3}\ m$$

La fuerza vertical, sobre la superficie horizontal es

$$F_2\ =\ 1000 \times 2 \times 2\ \ \ \ =\ 4000\ kg$$

y su brazo de la fuerza vertical es:

$$b_2\ =\ \frac{1}{2} 2.00 =\ 1.00\ m$$

El peso de la presa, W , es desconocido

W = ?

y su línea de acción respecto al eje A es

$$b_w\ =\ \frac{2}{3}\ 2.00 = \frac{4}{3}\ m$$

La condición de equilibrio $\left(\Sigma\, M_A = 0\right)$ es

$$1000 \times \frac{1}{3} + 4000 \times 1.00 - W \times \frac{4}{3} = 0$$

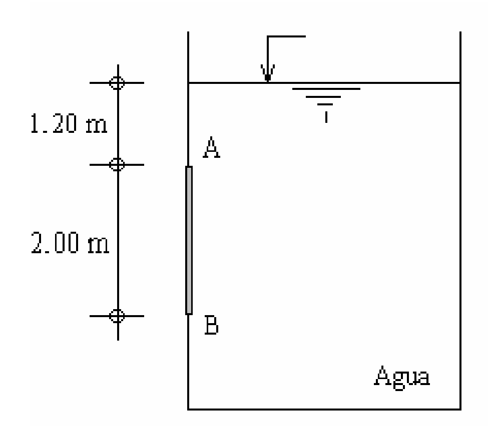
Al despejar se obtiene

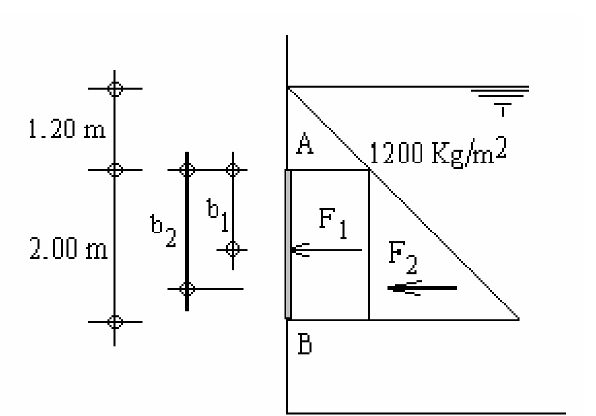
$W = 3250 \;\; kg$

Problema 2.19

a) Determinar la fuerza resultante F, debida a la acción del agua sobre la superficie plana rectangular AB de 2m de altura y 1 m de ancho que se muestra en la figura.

b) Determinar su posición.





Método A (utilizando las fórmulas)

a) Determinación de la fuerza

$F = \gamma \times \bar{h} \times A$

$F = 1000 \times (1.2 + 1) \times (2 \times 1)$

$F = 4400 \; kg$

b) Determinación del punto de aplicación

$$Y_{cp} = \frac{I_{cg}}{\bar{Y}\, A} + \bar{Y}$$

$$Y_{cp} = \frac{\frac{1 \times 2^3}{12}}{(1,2+1) \times (2 \times 1)} + (1.2 + 1)$$

Y_{cp} = 2,352 mts (a partir de la superficie)

Método B (utilizando el diagrama de presiones)

El volumen del prisma trapezoidal de presiones es

$$F = \left(\frac{1200+3200}{2}\right) \times 2 \times 1$$

F = 4400 kg

Si se divide el trapecio en un rectángulo y un triángulo se tiene

Para el rectángulo

$F_1 = 1200 \times 2 \times 1 = 2400$ kg

Y para el triángulo:

$F_2 = \frac{1}{2} 2000 \times 2 \times 1 = 2000$ kg

El momento estático de la fuerza total F, respecto al punto A es igual al momento de las fuerzas parciales F_1 y F_2; es decir,

$F \times b = F_1 b_1 + F_2 b_2$,

de donde,

$$b = \frac{F_1 b_1 + F_2 b_2}{F}$$

Al sustituir resulta

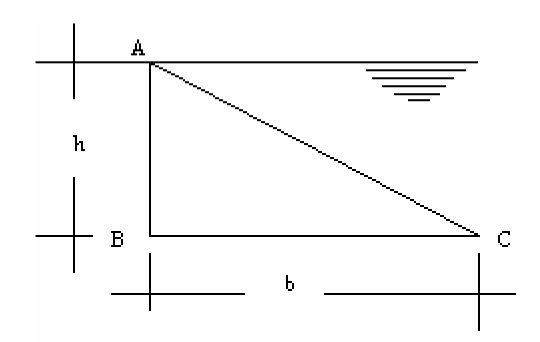
$$b = \frac{2400 \times 1 + 2000 \times \frac{2}{3} \times 2}{4400}$$

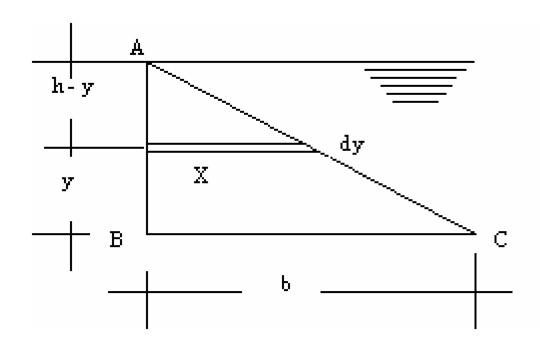
b = 1.15 m

La posición desde la superficie será

$Y_{cp} = 1.20 + 1.15 = 2.35$ m

Problema 2.20
Una superficie triangular, con un ángulo recto, tiene un vértice en la superficie libre de un líquido como se muestra en la figura. Si la compuerta se encuentra sobre un plano vertical, hallar la fuerza sobre dicha superficie.
a) Mediante la utilización de la fórmula.
b) Mediante integración.





a) Mediante la utilización de la fórmula

$$F = P_{cg} \, A$$

La presión en el centro de gravedad de la superficie es

$$P_{cg} = \gamma \bar{h} = \frac{2}{3} \, h \, \gamma$$

El área total de la superficie es

$$A = \frac{b \; h}{2}$$

Al sustituir resulta

$$F = \frac{2 \gamma \; h}{3} \times \frac{b \; h}{2}$$

después de simplificar se obtiene

$$F = \frac{\gamma \; h^2 \; b}{3}$$

b) Mediante integración

$$dF = p \; dA$$

$$dA = x \; dy$$

Según la relación de triángulos se tiene

$$\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{b}{h}(h-y)$$

La fuerza total será igual a la integral

$$F = \int_0^h \frac{b}{h}(h-y)\, dy \text{ x } \gamma(h-y)$$

Simplificando,

$$F = \gamma \int_0^h \frac{b}{h}(h-y)^2\, dy$$

de donde

$$F = \frac{\gamma \text{ x } b}{h}\left[h^2 y - \frac{2h\, y^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right]_0^h$$

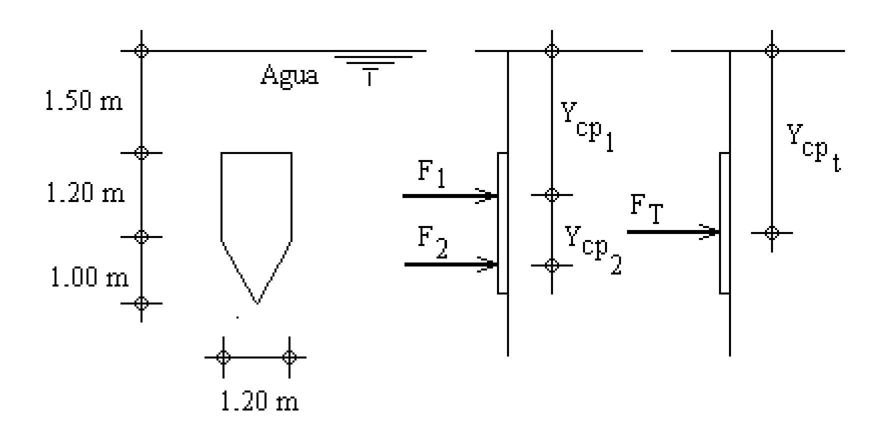
Luego de evaluar entre 0 y h, se obtiene

$$F = \frac{\gamma \ b}{h}\left[h^3 - h^3 + \frac{h^3}{3}\right]$$

Finalmente

$$F = \frac{\gamma\, b\, h^2}{3}$$

Problema 2.21
Calcular la magnitud y punto de aplicación de la fuerza horizontal que actúa sobre la compuerta plana y vertical mostrada en la figura.



La fuerza F_1, que actúa sobre la superficie cuadrada es

$F_1 = \gamma \times \bar{h} \times A = 1000\,(1.50 + 0.60)\,1.20 \times 1.20 = 3024.00 \text{ kg}$

y su punto de aplicación, respecto a la superficie del agua,

$$Y_{cp1} = \frac{I_{cg}}{\bar{Y}\,A} + \bar{Y} = \frac{\left(\dfrac{1.2 \times 1.2^3}{12}\right)}{2.10 \times (1.20 \times 1.20)} + 2.10 = 2.16 \text{ m}$$

La fuerza F_2, que actúa sobre la superficie triangular es

$$F_2 = \gamma \times \bar{h} \times A = 1000\left(1.50 + 1.20 + \frac{1}{3}\right) \times 1 \times \left(\frac{1.20}{2}\right) = 1818.00 \text{ kg}$$

y su punto de aplicación, respecto a la superficie del agua es

$$Y_{cp2} = \frac{I_{cg}}{\bar{Y}\,A} + \bar{Y} = \frac{\left(\dfrac{1.20 \times 1.20^3}{36}\right)}{3.03 \times \left(\dfrac{1.20 \times 1.20}{2}\right)} + 3.03 = 3.05 \text{ m}$$

La fuerza total sobre la superficie compuesta es

$F_t = 3024 + 1818 = 4842 \text{ kg}$

El momento estático de la fuerza F_t, respecto a la superficie del agua es igual al momento de las fuerzas parciales F_1 y F_2 respecto a la misma superficie

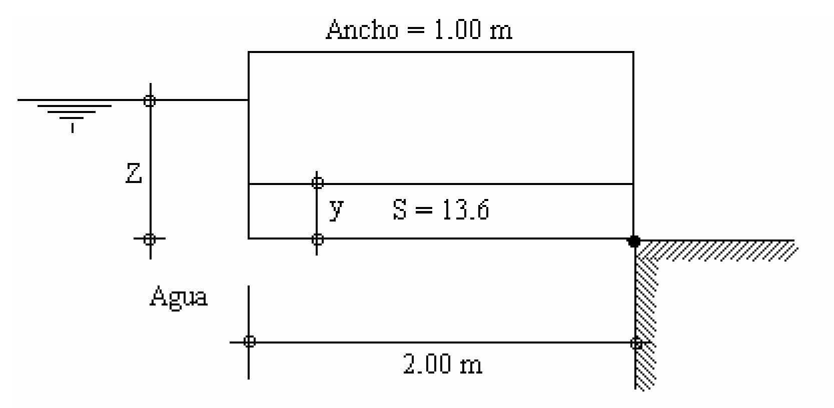
$F_t\, Y_{cpT} = F_1\, Y_{cp1} + F_2\, Y_{cp2}$

Despejando y sustituyendo se tiene

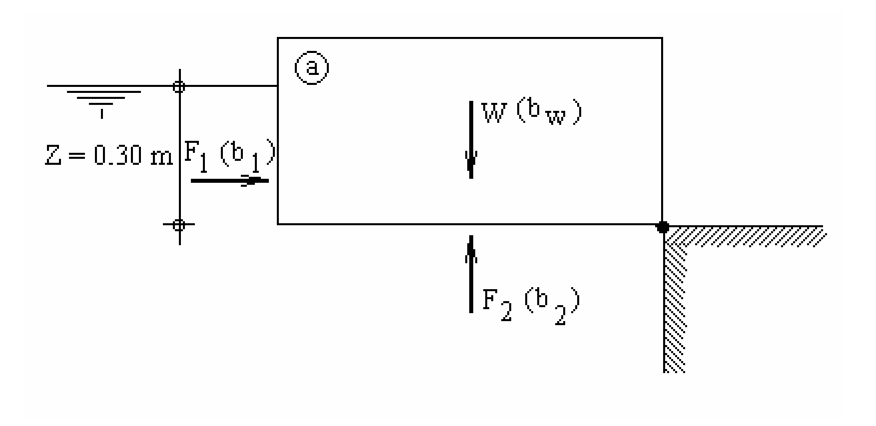
$$Y_{cpT} = \frac{3024 \times 2.16 + 1818 \times 3.05}{4842}$$

$Y_{cpT} = 2.49 \text{ m}$

Problema 2.22
El prisma rectangular hueco está en equilibrio cuando y = 0 y Z = 30 cm.
a) Calcular el peso del prisma
b) Si Z = 45 cm, calcular "y" para que se encuentre en equilibrio.



a) Prisma vacío



La fuerza sobre la superficie vertical y su punto de aplicación son respectivamente

$$F_1 = \frac{1}{2} \times 1000 \times 0.30^2 \times 1 = 45 \text{ kg} \qquad \text{y} \qquad b_1 = \frac{1}{3}\, 0.30 = 0.10 \text{ m}$$

La fuerza sobre la superficie horizontal y su punto de aplicación son respectivamente

$$F_2 = 300 \times 2 \times 1 = 600 \text{ kg} \qquad \text{y} \qquad b_2 = \frac{2}{2} = 1.00 \text{ m}$$

La condición de equilibrio se obtiene haciendo la sumatoria de momentos en la articulación, siendo W el peso del prisma y b_w, su punto de aplicación; es decir

$$F_1 b_1 + F_2 b_2 = W b_w$$

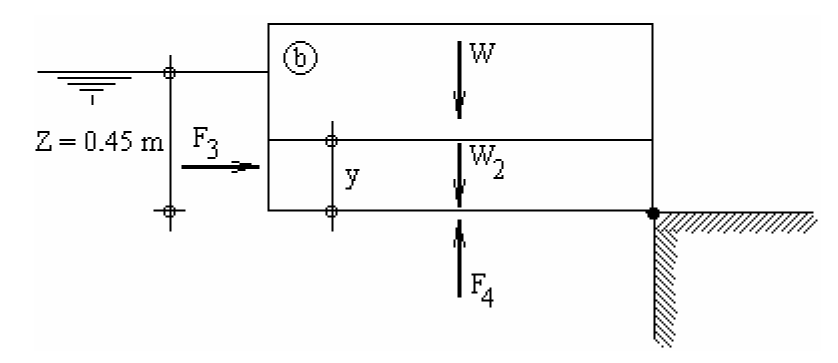
Despejando se obtiene

$$W = \frac{F_1 b_1 + F_2 b_2}{b_w}$$

como $b_w = 1.00$ m, al sustituir se obtiene

$$W = \frac{45 \times 0.1 + 600 \times 1}{1} = 604.50 \text{ kg}$$

b) Prisma con una altura "y" de mercurio



La fuerza sobre la superficie vertical y su punto de aplicación son respectivamente

$$F_3 = \frac{1}{2} \times 1000 \times 0.45^2 \times 1 = 101.25 \text{ kg} \quad \text{y} \quad b_3 = \frac{1}{3} \times 0.45 = 0.15 \text{ m}$$

La fuerza sobre la superficie horizontal y su punto de aplicación son respectivamente

$$F_4 = 450 \times 2 \times 1 = 900.00 \text{ kg} \quad \text{y} \quad b_4 = \frac{2}{2} = 1.00 \text{ m}$$

El peso del prisma, calculado anteriormente, y su punto de aplicación son respectivamente

$$W = 604.50 \text{ kg} \quad \text{y} \quad b_w = \frac{1}{2}\, 2 = 1.00 \text{ m}$$

El peso del mercurio y su punto de aplicación son respectivamente

$$W_2 = y \times 2 \times 1 \times 13600 = 27200\ y \quad \text{y} \quad b_{w2} = 1.00 \text{ m}$$

La condición de equilibrio se obtiene haciendo sumatoria de momento respecto a la articulación

$$F_3 \times b_3 + F_4 \times b_4 = W \times b_w + W_2\, b_{w2}$$

$$W_2 = \frac{F_3\, b_3 + F_4\, b_4 - W\, b_w}{b_{w\,2}}$$

Al sustituir se tiene

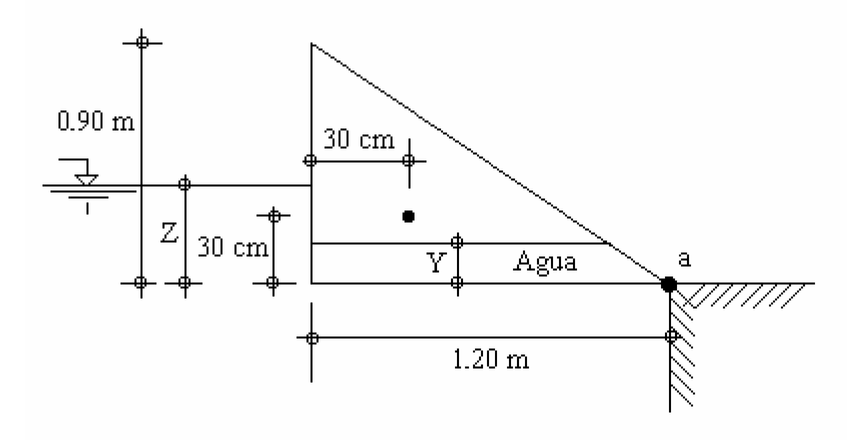
$$W_2 = \frac{101.25 \times 0.15 + 900 \times 1 - 604.50 \times 1}{1} = 310.69 \text{ kg}$$; lo que corresponde al peso del mercurio para mantener el equilibrio.

Como

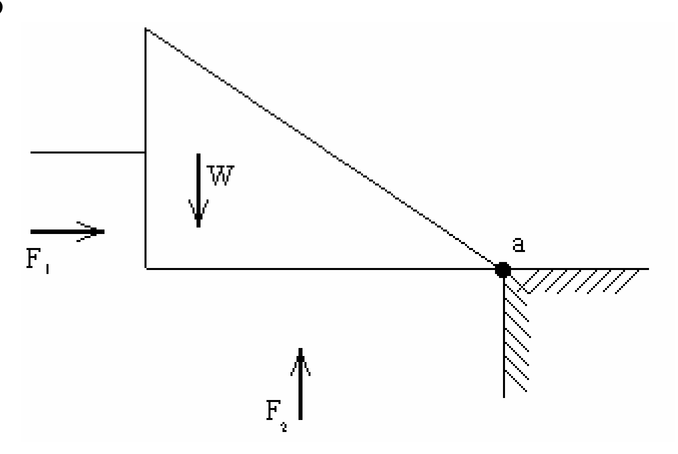
27200 y = 310.69

Entonces se obtiene
y = 0.011 m

Problema 2.23
En la figura el prisma triangular hueco está en equilibrio cuando Y = 0 y Z = 30 cm. La línea de acción del centro de gravedad del prisma se encuentra según lo indicado.
a) Determinar el peso del prisma por metro de longitud.
b) Hallar el valor de "Y", si Z = 45 cms.



a) Prisma vacío



La fuerza sobre la superficie vertical y su punto de aplicación son respectivamente

$F_1 = \frac{1}{2} 1000 \times 0.3^2 \times 1 = 45$ kg y $b_1 = \frac{1}{3} 0.30 = 0.10$ m

La fuerza sobre la superficie horizontal y su punto de aplicación son respectivamente

$F_2 = 0.30 \times 1000 \times 1.20 \times 1 = 360$ kg y $b_2 = \frac{1}{2}\ 1.20 = 0.60$ m

La condición de equilibrio se obtiene haciendo sumatoria de momento respecto al punto a, siendo W el peso del prisma.

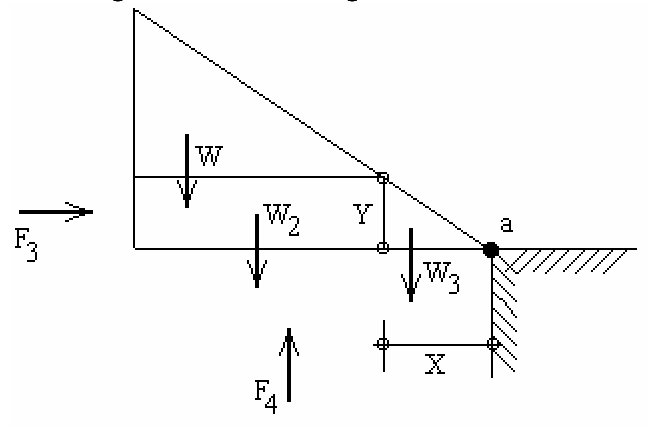
$\sum M_a = 0$

$45 \times 0.10 + 360 \times 0.60 - W\, 0.90 = 0$

de donde

$W = 245$ kg

b) Prisma con una altura de agua en el interior igual a Y



La fuerza sobre la superficie vertical y su línea de acción son respectivamente

$F_3 = \frac{1}{2} 1000 \times 0.45^2 \times 1 = 101.25$ kg y $b_3 = \frac{1}{3} 0.45 = 0.15$ m

La fuerza sobre la superficie horizontal y su línea de acción son respectivamente

$F_4 = 450 \times 1.20 \times 1 = 540$ kg y $b_2 = \frac{1}{2}\ 1.20 = 0.60$ m

El peso total del agua, en el interior del prisma, se puede calcular como W_2 y W_3.

Por relación de triángulos

$$\frac{X}{Y} = \frac{1.20}{0.9} \quad \Rightarrow \quad X = \frac{4}{3} Y$$

El peso W_3 y su línea de acción son, respectivamente

$W_3 = \frac{1}{2}\ \frac{4}{3}\ Y\ Y \times 1 \times 1000$ y $b_3 = \frac{2}{3}\ \frac{4}{3}\ Y = \frac{8}{9}\ Y$

El peso W_2 y su línea de acción son respectivamente

$W_2 = (1.20 - \frac{4}{3} Y)\ Y \times 1 \times 1000$ y $b_2 = \left(1.20 - \frac{4}{3} Y\right) \frac{1}{2}$

La condición de equilibrio se obtiene haciendo sumatoria de momentos respecto al punto a.

$\sum M_a = 0$

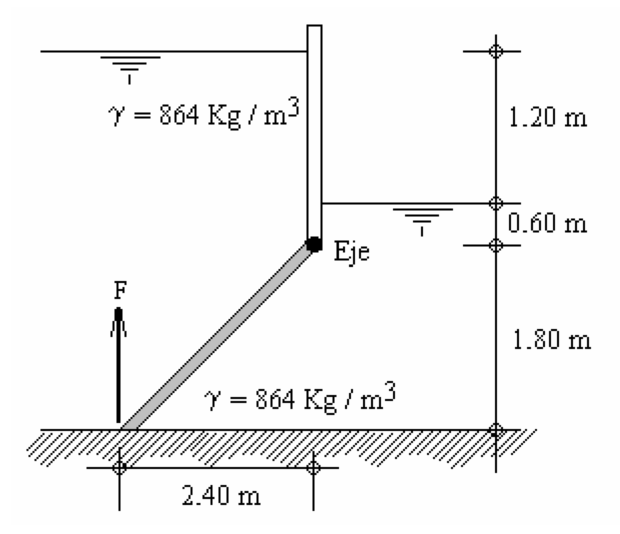
$$\left(\frac{2}{3}Y^2\,1000\right)\frac{8}{9}Y + \left[\left(1.20\ -\ \frac{4}{3}Y\right)Y\,1000\right]\left[\left(\frac{4}{3}Y + \left(1.20 - \frac{4}{3}Y\right)\frac{1}{2}\right)\right] + 245 \text{ x } 0.90 - 540 \text{ x } 0.60 - 101.25 \text{ x } 0.15 = 0$$

de donde se obtiene, $Y = 0.167$ m

Problema 2.24

a) Hallar el módulo y la línea de acción de la fuerza a cada lado de la compuerta que se muestra en la figura.

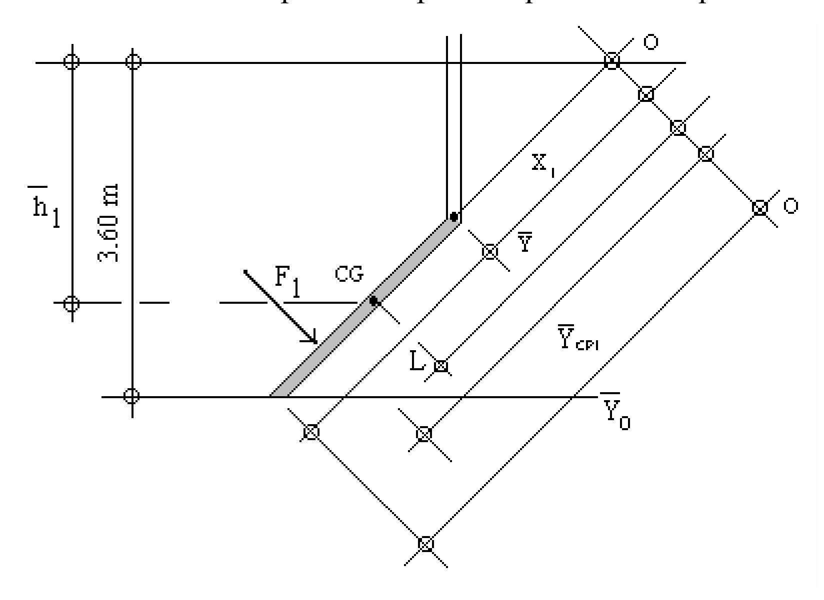
b) Determinar F para abrir la compuerta si ésta es homogénea y pesa 3000 kg. El ancho de la compuerta es de 1.80 m.



La longitud L, de la compuerta es

$$L = \sqrt{1.80^2 + 2.40^2} = 3.00 \text{ m}$$

Determinación la fuerza producida por el líquido de la izquierda



La altura desde el centro de gravedad de la compuerta hasta la superficie del líquido, donde la presión es 0, es

$$\overline{h_1} = \left(\frac{1.80}{2} + 0.60 + 1.20\right) = 2.20 \text{ m}$$

El área real de la compuerta es

A = L x ancho = 3.00 x 1.80

Entonces la fuerza es

$$F_1 = \gamma\ \overline{h_1}\ A = 864 \times 2.70 \times (1.80 \times 3.00)$$

$$F_1 = 12597 \text{ kg}$$

Determinación de la línea de acción de la fuerza producida por el líquido de la izquierda
Esta línea se encuentra a Y_{cp1} desde el punto O

$$Y_{cp1} = \frac{I_{cg}}{\overline{Y_1}\ A} + \overline{Y_1}$$

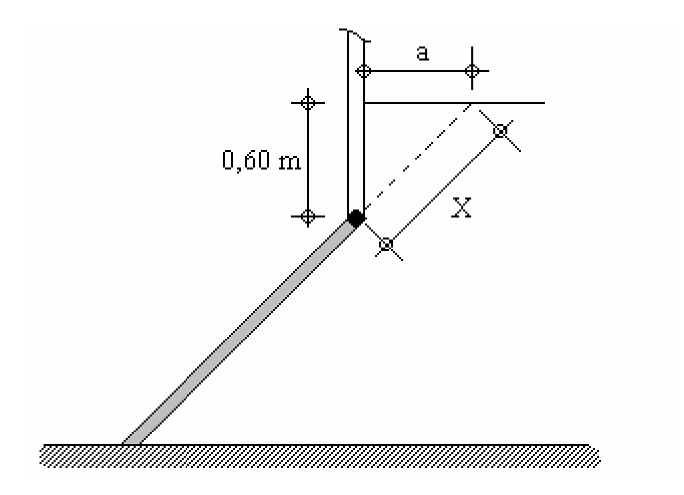
Por relación de triángulos

$$\frac{1.80}{3.00} = \frac{3.60}{\overline{Y_o}} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{Y_o} = 6 \text{ m}$$

$$\overline{Y}_1 = Y_0 - \frac{L}{2} = 6.00 - \frac{3.00}{2} = 4.50 \text{ m}$$

$$Y_{cp1} = \frac{I_{cg}}{\overline{Y}_1 A} + \overline{Y}_1 = \frac{\dfrac{1.80 \times 3.00^3}{12}}{4.50 \times 1.80 \times 3.00} + 4.50 = 4.67 \text{ m}$$

Determinación la fuerza producida por el líquido de la derecha.



La altura desde el centro de gravedad de la compuerta hasta la superficie del líquido, donde la presión es 0, es

$$\overline{h}_2 = \frac{1.80}{2} + 0.60 = 1.50 \text{ m}$$

$$F_2 = \gamma \, \overline{h}_2 \, A = 864 \times 1.50 \times 1.80 \times 3.00$$

$$F_2 = 6998 \text{ kg}$$

Determinación de la línea de acción de la fuerza producida por el liquido de la derecha
Esta línea de acción se encuentra a Y_{cp} desde el punto O

$$Y_{cp1} = \frac{I_{cg}}{\overline{Y_1} A} + \overline{Y_1}$$

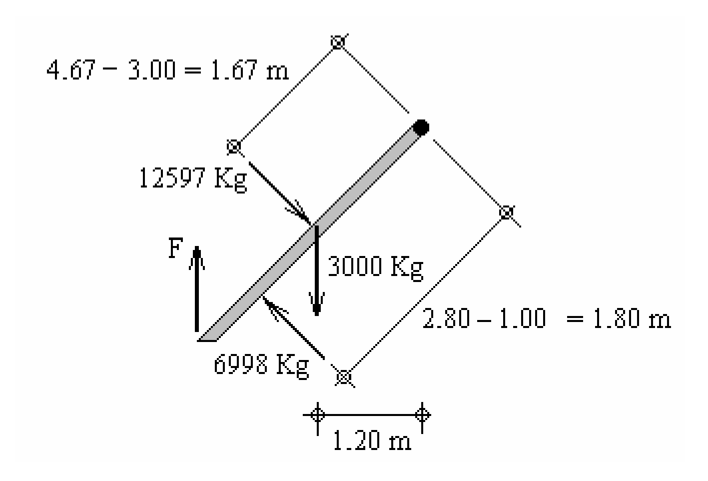
Por relación de triángulos

$$\frac{1.80}{3.00} = \frac{0.60}{\overline{X}} \qquad \Rightarrow \qquad X = 1.00 \text{ m}$$

$$\overline{Y_2} = X + \frac{L}{2} = 1.00 + \frac{3.00}{2} = 2.50 \text{ m}$$

$$Y_{cp2} = \frac{\frac{1.80 \times 3.00^3}{12}}{(2.50) \times (1.80 \times 3.00)} + (2.50) = 2.80 \text{ m}$$

Los brazos de cada una de las fuerzas se encuentran indicados en la figura siguiente



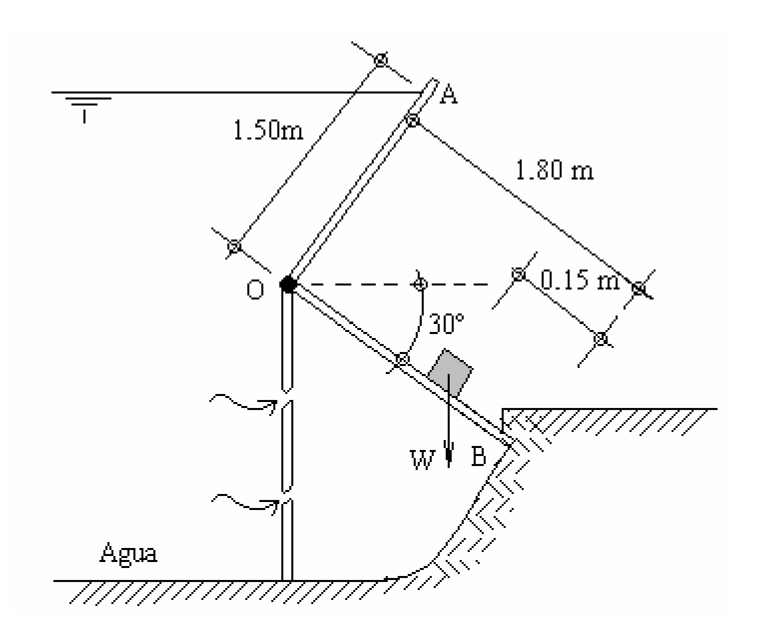
Mediante la condición de equilibrio tenemos

$$12597 \times 1.67 + 3000 \times 1.20 - 6998 \times 1.80 - F \times 2.40 = 0$$

$$F = \frac{21036 + 3600 - 12596}{24}$$

$$F = 5017 \text{ kg}$$

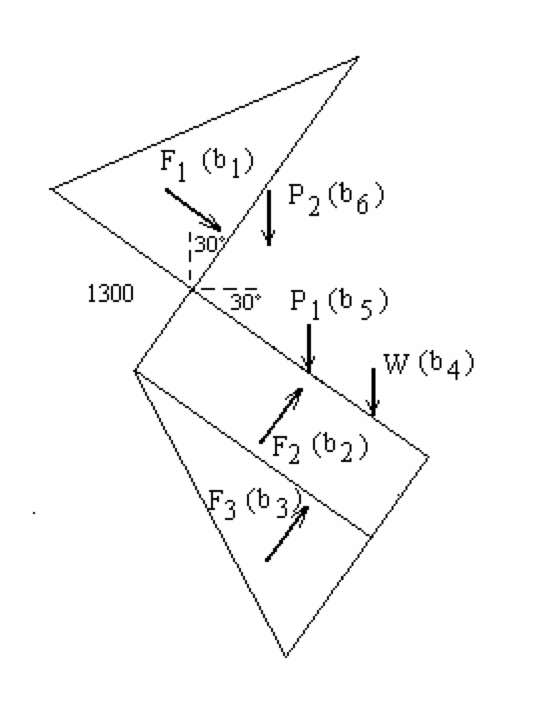
Problema 2.25
¿Cuál será el valor del contrapeso W para que la compuerta de la figura se mantenga en la forma mostrada? Las hojas OA y OB, rectangulares de 4,00 m de ancho, forman en O un ángulo rígido de 90^o y pesan 3000 kg y 3600 kg, respectivamente.



Determinación de las presiones en los puntos A, O, B, con el fin de dibujar los diagramas de presiones $p_A = 0$

$p_0 = p_A + \gamma\, h_1 = \quad 0 + 1000\ (1.50 \cos 30^0) = 1300\ kg/m^2$

$p_B = p_0 + \gamma\, h_1 = 1300 + 1000\ (1.80 \text{ sen } 30^0) = 2200\ kg/m^2$



Determinación de la fuerza

La fuerza sobre la cara AO, de 4 m de ancho se puede calcular según el diagrama de presiones como

$$F_1 = \frac{1}{2} \text{ x } 1300 \text{ x } 1.50 \text{ x } 4 = 3897 \text{ kg}$$

La fuerza sobre la cara OB, de 4 m de ancho se puede calcular, en dos partes, según el diagrama de presiones como

$$F_2 = 1300 \text{ x } 1{,}80 \text{ x } 4 = 9353 \text{ kg}$$

$$F_3 = \frac{1}{2} \text{ x } 900 \ \ 1.50 \text{ x } 4 = 3240 \text{ kg}$$

El peso P_1 de la hoja OA es

$$P_1 = 3600 \text{ kg}$$

El peso P_1 de la hoja OB es

$$P_2 = 3000 \text{ kg}$$

Consideremos W el peso necesario para mantener el equilibrio

Determinación de los brazos de cada una de las fuerzas calculadas anteriormente

$$b_1 = \frac{1}{3} \text{ x } 1.50 = 0.50 \text{ m}$$

$$b_2 = \frac{1}{2} \text{ x } 1.80 = 0.90 \text{ m}$$

$$b_3 = \frac{2}{3} \text{ x } 1.80 = 1.20 \text{ m}$$

$$b_4 = (1.80 - 0.15) \cos 30^0 = 1.43 \text{ m}$$

$$b_5 = 0.90 \cos 30^0 = 0.78 \text{ m}$$

$$b_6 = 0.75 \cos 60^0 = 0.38 \text{ m}$$

La condición de equilibrio indica que la sumatoria de momentos respecto al eje O es

$$\sum M_o = F_1 b_1 - F_2 b_2 - F_3 b_3 + P_1 b_5 + P_2 b_6 + W b_4 = 0$$

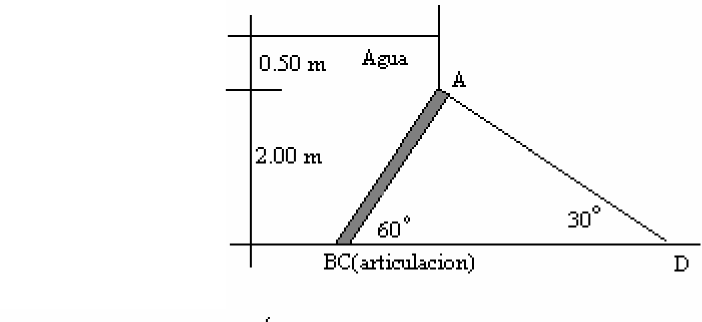
Al sustituir

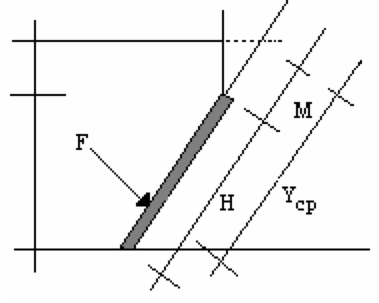
$$\sum M_o = 3897 \text{ x } 0.50 - 9353 \text{ x } 0.90 - 3240 \text{ x } 1.20 + 3600 \text{ x } 0.78 + 3000 \text{ x } 0.38 + W \text{ x } 1.43 = 0$$

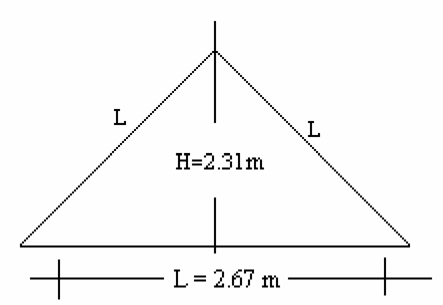
de donde

$$W = \frac{-1948.50 + 8417.70 + 3888 - 2808 - 1140}{1.43} = 4481.96 \text{ kg}$$

Problema 2.26
Calcular la fuerza de compresión a que está sometida la barra AD, por la acción del agua sobre la compuerta triangular equilátera ABC.







Determinación de las distancias H y L

$$\text{sen } 60^o = \frac{2.00}{H} \quad \Rightarrow \quad H = \frac{2.00}{\text{sen } 60^o} \quad \Rightarrow \quad H = 2.31 \text{ m}$$

$$\text{sen } 60^o = \frac{2.31}{L} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{2.31}{\text{sen } 60^o} \Rightarrow \quad L = 2.67 \text{ m}$$

Determinación de las fuerzas producidas por el agua sobre la compuerta

$$F = \gamma \, \bar{h} \, A = 1000 \left(0.5 + \frac{2}{3}\, 2\right)\left(\frac{1}{2} 2.67 \text{ x } 2.31\right)$$

$$F = 5654 \text{ kg}$$

Determinación del punto de aplicación, Y_{cp} de la fuerza

La distancia M, imaginaria, indicada en la figura es

$$M \cos 30^0 = 0.50 \quad \Rightarrow \quad M = \frac{0.50}{\cos 30^0} = 0.58 \text{ m}$$

El momento de inercia del triángulo respecto al eje centroidal es

$$I_{cg} = \frac{L \, H^3}{36}$$

La distancia $\overline{Y}$ es

$$\overline{Y} = 0.58 + \frac{2}{3}\,2.31 = 2.12 \text{ m}$$

La distancia Y_{cp} es

$$Y_{cp} = \frac{I_{cg}}{\overline{Y}\,A} + \overline{Y}$$

Al sustituir se obtiene

$$Y_{cp} = \frac{\dfrac{2.67 \text{x} 2.31^3}{36}}{2.12\left(\dfrac{2.67 \text{ x } 2.31}{2}\right)} + 2.12 = 2.26 \text{ m}$$

El brazo respecto al eje horizontal B C es

$$b = (2.31 + 0.58) - 2.26 = 0.63 \text{ m}$$

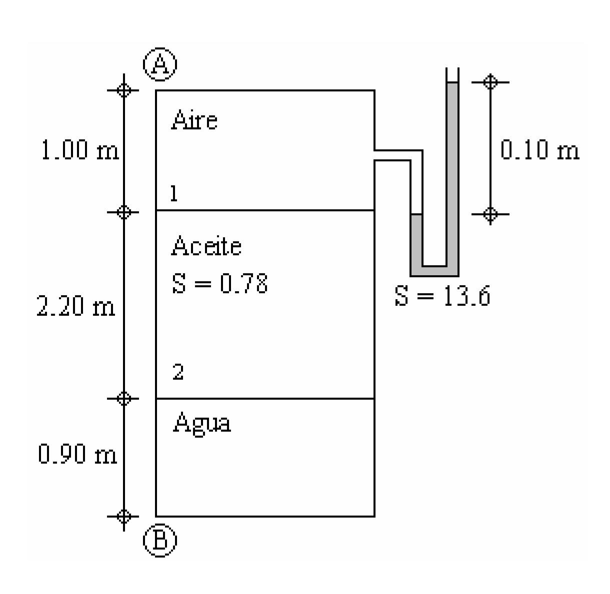
Según la condición de equilibrio

$$F \text{ x } b - F_c \text{ x } 2.31 = 0$$

Al despejar se obtiene

$$F_c = \frac{5654 \text{ x } 0.63}{2.31} = 1542 \text{ Kg}$$

Problema 2.27
En el depósito mostrado en la figura se pide:
a) Fuerza horizontal sobre la superficie AB
b) Punto de aplicación de la resultante respecto al punto B.
El ancho de la superficie AB es de 1.00 m.



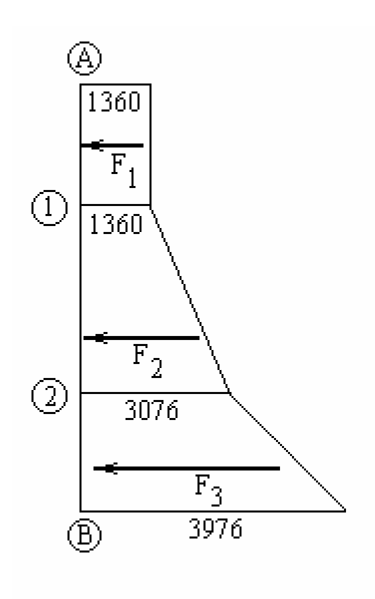
Determinación de las presiones en los puntos A, 1, 2, B, para dibujar los diagramas de presiones

$p_A = 0.10 \times 13600 = 1360 \text{ kg/m}^2$

$p_1 = \quad = 1360 \text{ kg/m}^2$

$p_2 = 360 + 2.2 \times 780 = 3076 \text{ kg/m}^2$

$p_B = 3076 + 0.9 \times 1000 = 3976 \text{ kg/m}^2$



Determinación de las fuerzas

La fuerza en la zona A−1, de la presión constante, en forma de prisma rectangular es

$F_1 = 1360\,(1.00 \times 1.00) = 1360.00 \text{ kg}$

La fuerza en la zona 1−2, de la presión variable, en forma de prisma trapezoidal es

$$F_2 = \frac{1360 + 3076}{2} \times 2.20 \times 1.00 = 4879.60 \text{ kg}$$

La fuerza en la zona 2−B, de la presión variable, en forma de prisma trapezoidal es

$$F_3 = \frac{3076 + 3976}{2} \times 0.90 \times 1.00 = 3173.40 \text{ kg}$$

La fuerza total F_H es

$$F_H = F_1 + F_2 + F_3 \quad \Rightarrow \quad F_H = 1360 + 4879.6 + 3173.40 = 9413 \text{ kg}$$

Determinación de los brazos respecto al punto B

$$b_1 = 0.90 + 2.20 + \frac{1.00}{2} = 3.60 \text{ m}$$

El centro de gravedad de un trapecio respecto a la base mayor es

$$X_{c\,g} = \frac{h}{3}\left[1 + \frac{a}{a+b}\right]$$

Entonces, al sustituir se obtienen los brazos

$$b_2 = 0.90 + \frac{2.20}{3}\left[1 + \frac{1360}{1360 + 3076}\right] = 1.86 \text{ m} \qquad \text{y}$$

$$b_3 = \frac{0.90}{3}\left[1 + \frac{3076}{3976 + 3076}\right] = 0.43 \text{ m}$$

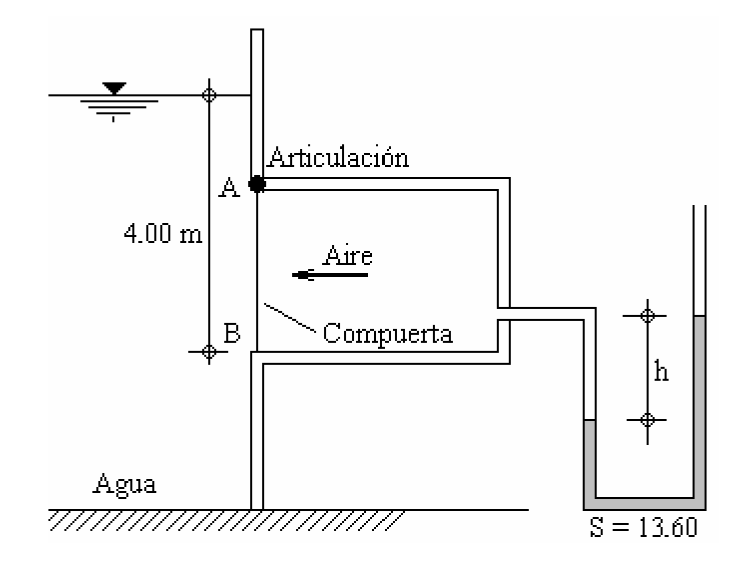
El momento producido por la fuerza total F_H, respecto al punto B es igual a la suma de los momentos parciales de las fuerzas F_1, F_2 y F_3, es decir,

$$F_H \text{ x } b = F_1 \text{ x } b_1 + F_2 \text{ x } b_2 + F_3 \text{ x } b_3$$

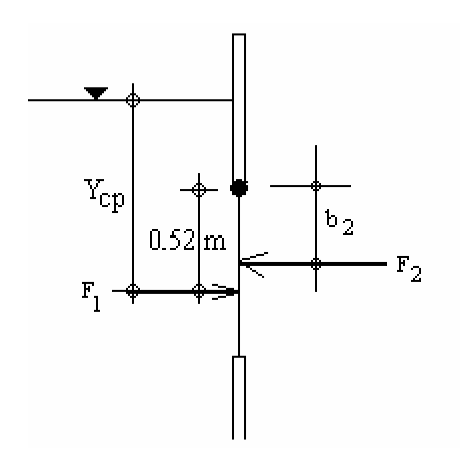
$$b = \frac{1360 \text{ x } 3.60 + 4879.60 \text{ x } 1.86 + 3173.40 \text{ x } 0.43}{9413} \quad \Rightarrow \quad b = 1.63 \text{ m}$$

Problema 2.28

Calcular la altura, h necesaria para mantener en equilibrio la compuerta circular ,de 1.00 m de diámetro que se muestra en la figura.



Determinación de la fuerza F_1, producida por el agua y su punto de aplicación



$$F_1 = \gamma\ h_{c\,g}\ A$$

$$F_1 = 1000 \times 3.5 \times \frac{\pi}{4} \times 1.00^2 = 2750 \text{ kg}$$

Como

$$I_{c\,g} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3.14 \times 1.00^4}{64} = 0.05 \text{ m}$$

$$Y_{c\,p} = \frac{I_{c\,g}}{\overline{Y}\ A} + \overline{Y}$$

$$Y_{cp} = \frac{0.05}{\frac{\pi}{4} \times 1.00^2 \times 3.5} + 3.50 = 0.02 + 3.50 = 3.52 \text{ m}$$

El brazo respecto a la articulación es

$b_1 = Y_{cp} - 3.00 = 0.52$ m

Determinación de la fuerza F_2 producida por el aire y su punto de aplicación

Como la presión en la cámara de aire es constante, la fuerza F_2 se determina como

$$F_2 = (13.6 \text{ x } 1000)\,(h)\left(\frac{\pi}{4}1.00^2\right)$$

$$b_2 = \frac{1}{2}1.00 = 0.50 \text{ m}$$

La condición de equilibrio indica

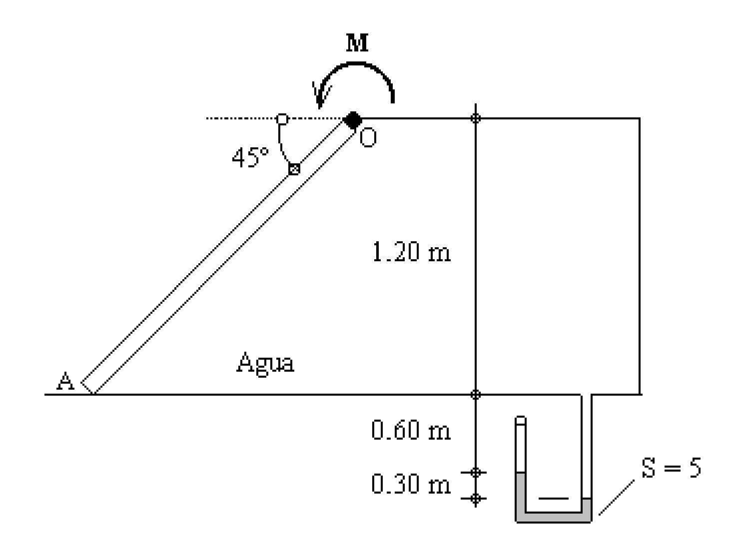
$F_2\, b_2 - F_1\, b_1 = 0$

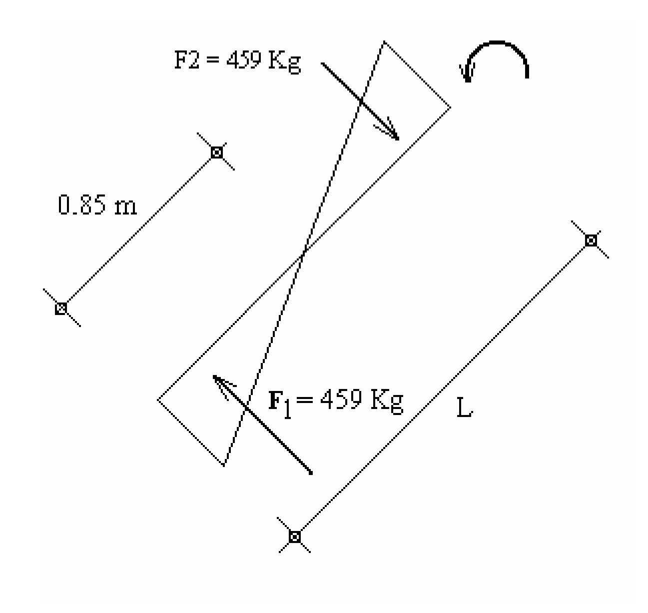
$$(13.6 \text{ x } 1000)\,(h)\left(\frac{\pi}{4}1.00^2\right) \text{x } 0.50 - 2752 \text{ x } 0.52 = 0$$

Al despejar resulta

$h = 0.25$ m

Problema 2.29
Determinar el momento que hay que aplicar en "O" para mantener la compuerta cerrada. El ancho de la compuerta rectangular es de 1.80 m.





Determinación de las presiones en los puntos A y O, con el fin de dibujar los diagramas de presiones

$p_A = 0.30 \times (5 \times 1000) - (0.60 + 0.30) \times 1000 = 600 \text{ kg/m}^2$

$p_0 = 600 - 1000 \times 1.20 = -600 \text{ kg/m}^2$

La longitud de la compuerta es

$\text{Sen } 45^0 = \dfrac{1.20}{L} \quad \Rightarrow \quad L = 1.70 \text{ m}$

El punto de corte o de presión cero ocurre, por simetría en

$L / 2 = 0.85 \text{ m}$

Entonces la fuerza se puede determinar a través de la cuña o diagrama de presiones como

$F_1 = F_2 = \dfrac{1}{2} 600 \times 0,85 \times 1,80 = 459 \text{ kg}$

El momento estático de las fuerzas F_1 y F_2 respecto al punto O es

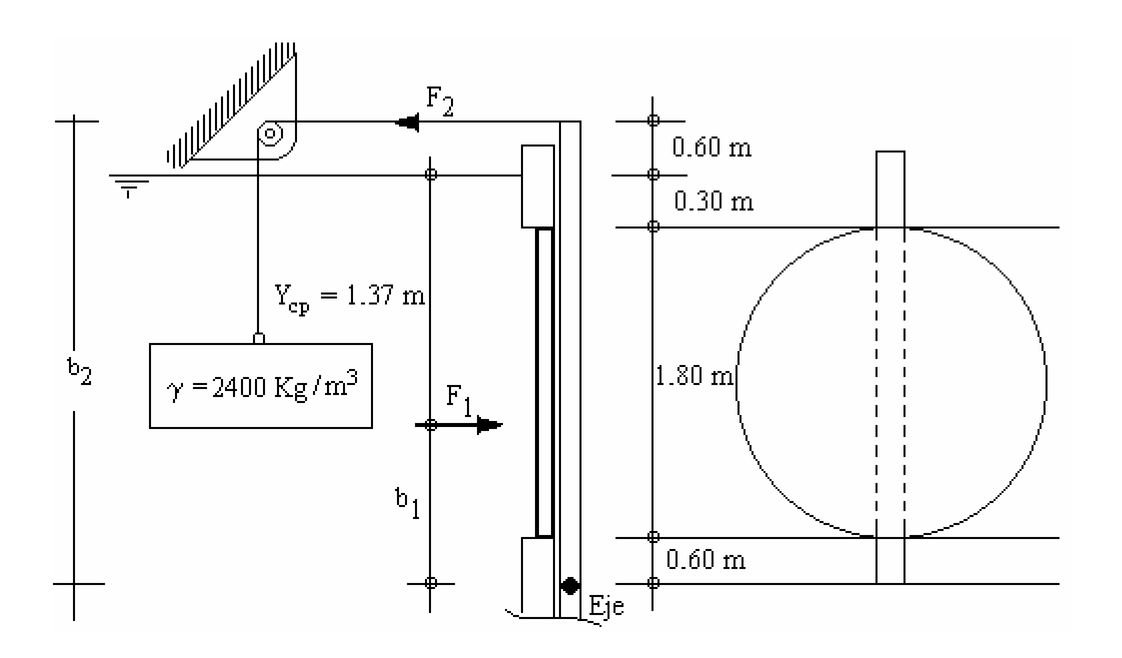
$M = F_1\, b_1 + F_2\, b_2$

Al sustituir resulta

$$M = 459 \times \left(\frac{2}{3}\,0{,}85 + 0{,}85\right) - 459 \left(\frac{1}{3} \times 0{,}85\right) = 520 \;\; kg\,.\,m$$

Problema 2.30

Calcular el volumen mínimo de un bloque de concreto (γ = 2400 kg/m^3) que pueda mantener la compuerta circular en la posición que se muestra en la figura. (El bloque está sumergido en agua)



Determinación de la fuerza F_1 y su punto de aplicación

$$F_1 = P_{cg}\, A = \gamma\, \bar{h}\, A = 1000 \times 1.20 \times \frac{\pi}{4} \times 1.80^2 \quad \Rightarrow \quad F_1 = 3051 \;\; kg$$

$$Y_{cp} = \frac{I_{cg}}{\bar{Y}_{XA}} + \bar{Y}$$

Como el momento de inercia es

$$I_{cg} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3.14 \times (1.80)^4}{64} = 0.515 \text{ m}$$

entonces

$$Y_{cp} = \frac{0,515}{1.20 \times \frac{\pi}{4} \times 1.80^2} + 1.20 = 0.17 + 1.20 = 1.37 \text{ m}$$

El brazo respecto al eje de rotación es

$$b_1 = (0.30 + 1.80 + 0.60) - 1.37 \text{ m} = 1.33 \text{ m}$$

Según la condición de equilibrio

$$F_1\, b_1 - F_2\, b_2 = 0 \Rightarrow \quad F_2 = \frac{F_1\, b_1}{b_2}$$

Al sustituir se obtiene

$$F_2 = \frac{3051 \times 1.33}{3.30} = 1230 \text{ kg}$$

Si la tensión del cable es 1230 kg, según la sumatoria de fuerzas verticales,

$$E + F_2 - W = 0$$

Donde E es el empuje que experimenta el cuerpo sumergido,

$$E = \gamma_{liq} \times V_{sumergido}$$

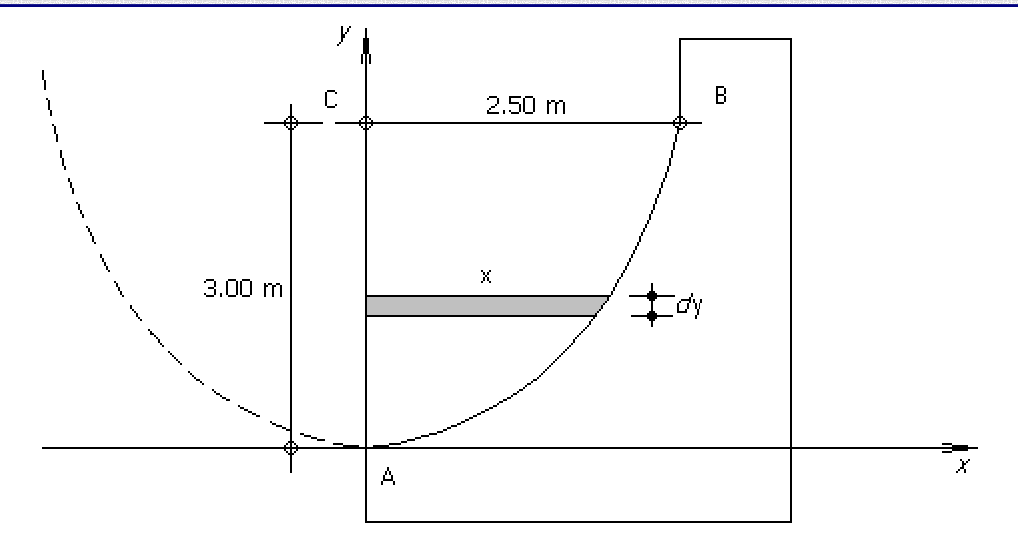
$$\gamma_{liq} \times V_{sumergido} + 1230 - W = 0$$

$$1000 \times V_{sumergido} + 1230 - 2400 \times V_{sumergido} = 0$$

$$V_{sumergido}\,(2400 - 1000) = 1230$$

$$V_{sumergido} = \frac{1230}{1400} = 0.878 \text{ m}^3$$

Problema 2.31
Calcular F_h , F_V , y F_R por metro de ancho debido a la acción del agua sobre el muro de retención parabólico que se muestra en la figura. El vértice de la parábola se encuentra en el punto A y es simétrica respecto al eje Y.



La fuerza vertical es igual al peso del volumen de líquido sobre la superficie curva el cual es igual al área entre la superficie curva, la superficie del agua y el eje Y multiplicada por el ancho y por el peso específico del líquido.

La ecuación de la parábola puede expresarse como

$$y = K x^2$$

Esta se debe satisfacer para el punto B, de coordenadas (2.50; 3.00); es decir,

$$3.0 = K \times 2.50^2 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{3.00}{(2.50)^2} = 0.48$$

de donde, a ecuación de la parábola

$$y = 0.48 x^2$$

El área descrita anteriormente se puede calcular mediante integración como

$$dA = dy \ x$$

$$dA = \sqrt{\frac{Y}{0.48}} \ dy$$

$$A = \int_0^3 \left(\frac{Y}{0.48}\right)^{1/2} dy = \frac{1}{0.48^{1/2}} \int_0^3 y^{1/2} dy$$

Al integrar se obtiene

$$A = \frac{1}{(0.48)^{1/2}}\left[\frac{2\ Y^{3/2}}{3}\right]_0^3 = \frac{1}{(0.48)^{1/2}}\left[\frac{2 \times 3^{3/2}}{3}\right] = 5.00\ m^2$$

Entonces la fuerza vertical es

$F_V = 5.00 \times 1.00 \times 1000 = 5000$ kg.

La fuerza horizontal es igual a la fuerza que actúa sobre la proyección vertical de la superficie; es decir,

$F_H = \gamma\ \bar{h}\ A$

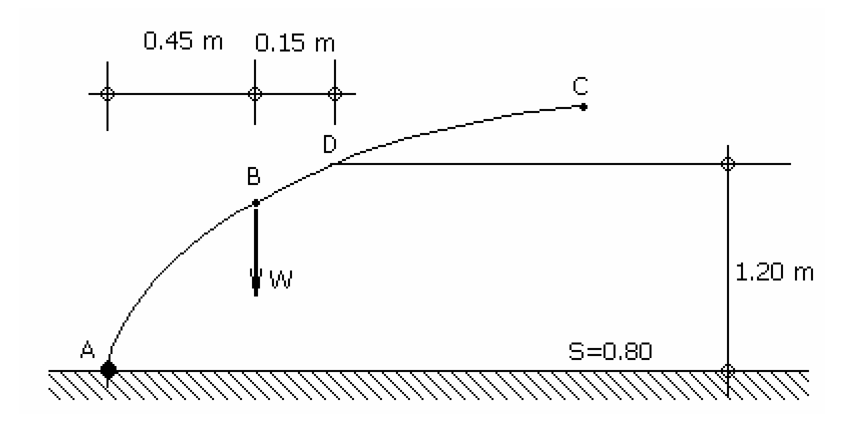
$F_H = 1000 \times 1.5 \times 3 \times 1 = 4500$ kg.

La resultante de la fuerza horizontal y vertical es

$$R = \sqrt{4500^2 + 5000^2}$$

$R = 6727$ kg.

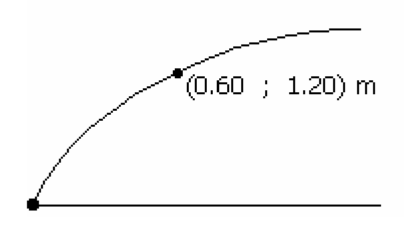
Problema 2.32
La compuerta ABC de la figura es de forma parabólica (A es el vértice de la parábola) y puede girar alrededor de A. Si su centro de gravedad está en B, ¿Qué peso W debe tener la compuerta para que esté en equilibrio en la forma que se muestra?
Ancho = 1.00 m



La fuerza vertical es igual al peso del volumen de líquido desalojado por la compuerta el cual es igual al área entre la superficie curva, la superficie imaginaria del líquido y el eje y, multiplicada por ancho de la compuerta y por el peso específico del líquido.
La ecuación de la parábola puede expresarse como

$x = K_1 \; y^2$

La cual se debe satisfacer para el punto D, de coordenadas (0.60; 1.20)



Es decir,

$0.6 = K_1 \times 1.20^2$

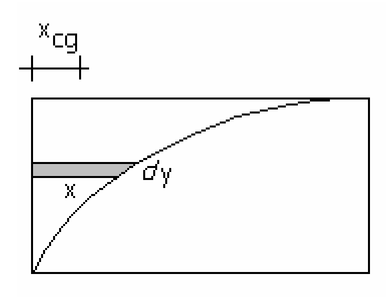
$$K_1 = \frac{0.6}{1.20^2} = 0.4167$$

de donde, la ecuación de la parábola es

$x = 0.4167 \; y^2$

El área descrita anteriormente se puede calcular mediante integración como

$dA = x \, dy$



$$A = \int_0^{1.20} \left(0.4167 \; y^2\right) dy$$

$$A = \frac{0.4167 \times 1.20^3}{3} = 0.24 \text{ m}^2$$

Entonces la fuerza vertical es

$F_V = 0.24 \times 1.00 \times 0.80 \times 1000 = 192$ kg

La fuerza vertical actúa en el centro de gravedad del área determinada anteriormente el cual se determina como

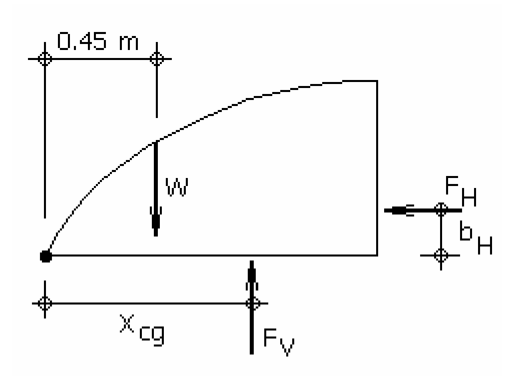
$$X_{cg}\ A = \int_0^{1.20} x\ \frac{x}{2}\ dy$$

Al sustituir y despejar el valor X_{cg}, se obtiene

$$X_{cg} = \frac{\int_0^{1.20} 0.4167\ y^2\ \frac{0.4167\ y^2}{2}\ dy}{0.24} = 0.18\ \text{m}$$

La fuerza horizontal y su brazo respecto al punto A son respectivamente

$$F_H = \frac{1}{2} \times 800 \times 1.20^2 \times 1.00 = 576\ \text{kg} \qquad \text{y} \qquad b_H = \frac{1}{3} \times 1.20 = 0.40\ \text{m}$$



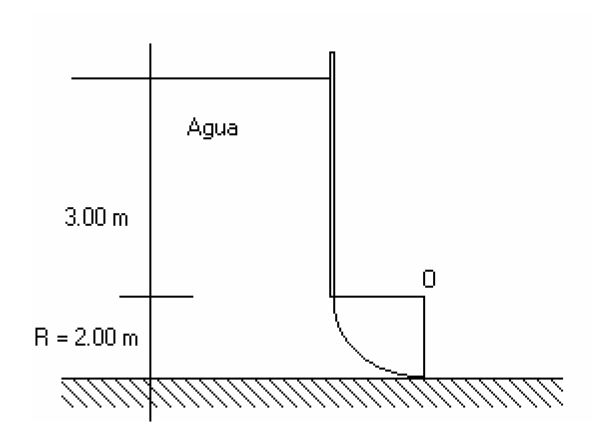
Según la condición de equilibrio

$$W \times 0.45 - X_{cg}\ F_V - F_H\ b_H = 0$$

Al sustituir y despejar se obtiene

$$W = \frac{0.18 \times 192 + 0.40 \times 576}{0.45} = 588.80\ \text{kg}$$

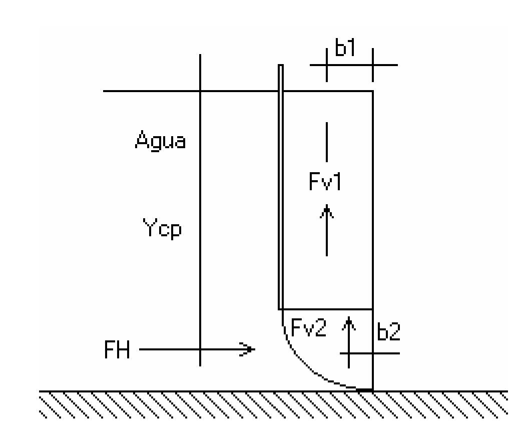
Problema 2.33
Para la compuerta radial que se muestra en la figura determinar:
a) La fuerza horizontal y su línea de acción.
b) La fuerza vertical y su línea de acción.
c) La fuerza F, necesaria para abrir la compuerta, despreciando su peso.
d) El momento respecto a un eje normal al papel y que pasa por el punto O



Determinación de la fuerza horizontal y su línea de acción

$$F_H = \gamma \times \bar{h} \times A = 1000 \times 4 \times 4 = 16000 \text{ kg}$$

$$Ycp = \bar{Y} + \frac{I_{cg}}{\bar{Y}\ A} = 4.00 + \frac{\frac{2 \times 2^3}{12}}{4.00 \times (2.00 \times 2.00)} = 4 + \frac{1}{12} = 4.08 \text{ m}$$



Determinación de la fuerza vertical y su línea de acción

La fuerza vertical es igual al peso del volumen de líquido desalojado por la compuerta.

Con la finalidad de simplificar los cálculos esta fuerza se divide en dos partes siendo las fuerzas y los brazos respectivamente

$F_{V1} = 3 \times 2 \times 2 \times 1000 = 12000$ kg y $b_1 = 1.00$ m

$F_{V2} = \frac{\pi}{4}\frac{4^2}{4} \times 2 \times 1000 = 6280$ kg y $b_2 = \frac{4}{3}\frac{r}{\pi} = \frac{4 \times 2.00}{3\pi} = 0.848$ m

Determinación de la fuerza F, necesaria para abrir la compuerta

La condición de equilibrio indica que el momento respecto al punto O es cero; así,

$$\sum M_o = 0$$

$$12000 \times 1.00 + 6280 \times 0.848 - 16000 \times 1.08 + 2 \times F = 0$$

Al despejar se obtiene

$$F = \frac{2.56}{2} = 1.28 \quad \cong 0 \text{ kg}$$

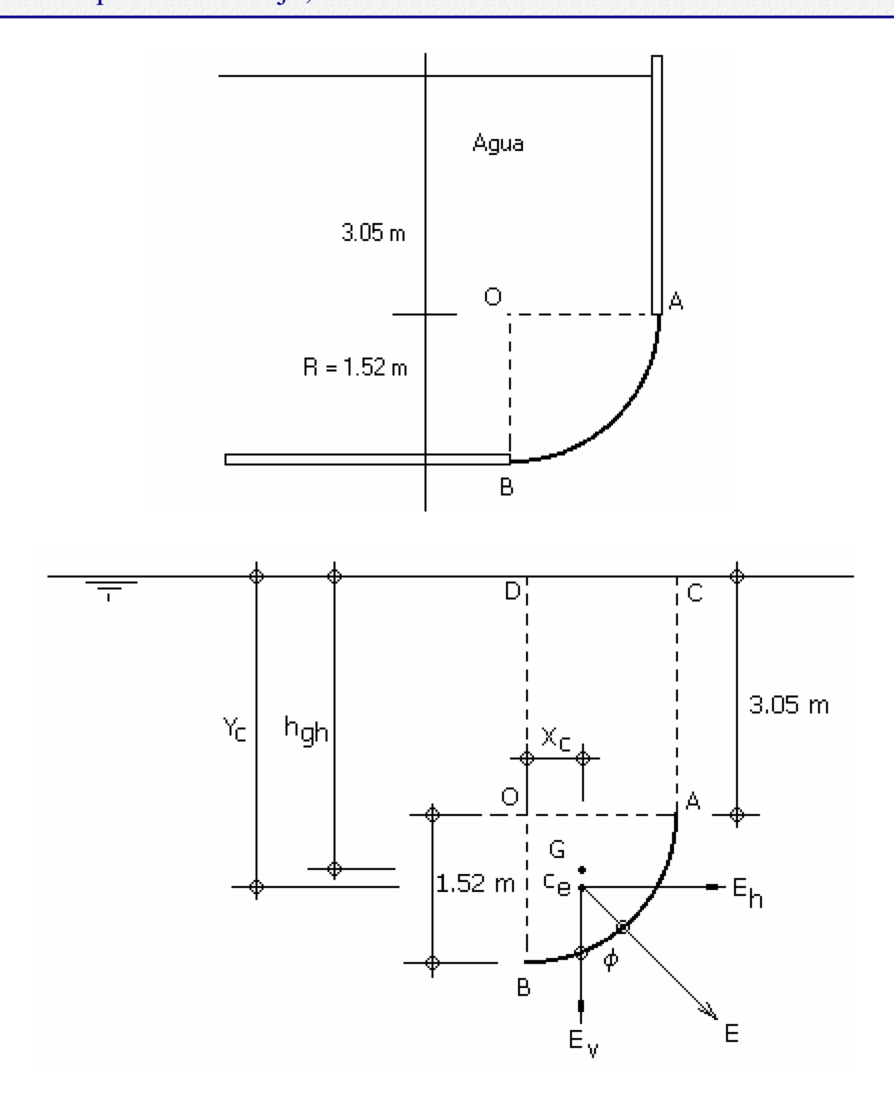
Es decir, no se necesita fuerza para abrir la compuerta.

Determinación del momento respecto al punto O

$\sum M_o = 0$ (Por el paso anterior)

Problema 2.34

Calcular la magnitud, dirección y punto de aplicación de la fuerza ejercida sobre el área AB debido a la acción del agua, sobre un cuarto de cilindro circular con una longitud, normal al plano del dibujo, de 2.44 m.



Determinación de la fuerza horizontal producida por el líquido sobre la proyección vertical de la superficie

$$F_H = \gamma \; h_{cg} \; A_p = 1000 \times \left(3.05 + \frac{1.52}{2}\right) \times 1.52 \times 2.44 = 14310 \text{ kg.}$$

Determinación del punto de aplicación

$$Y_{cp} = \overline{Y} + \frac{I_{cg}}{\overline{Y}A} = \left(3.05 + \frac{1.52}{2}\right) + \frac{2.44 \times 1.52^3}{12 \times 2.44 \times 1.52 \times (3.05 + 1.52)}$$

$$Y_{cp} = 3.81 + 0.0459 = 3.8559 \text{ m}$$

$$F_V = F_{V(ACDO)} + F_{V(AOB)} = 1000 \times 3.05 \times 2.44 \times 1.52 + 1000 \times 2.44 \times \left(\frac{\pi \times 1.52^2}{4}\right)$$

$$F_V = 11309 + 4424 = 15733 \text{ kg}$$

Los punto de aplicación de las fuerza verticales son

El de la fuerza $F_{V(ACDO)}$ es $\frac{1.52}{2} = 0.76$ m

El de la fuerza $F_{V(AOB)}$ es $\frac{4}{3}\frac{r}{\pi} = \frac{4 \times 1.52}{3\pi} = 0.645$ m

El momento producido por la fuerza vertical total es igual al la sumatoria de los momentos producidos por cada una de las fuerzas verticales

$$F_V \; X_c = E_{V(ACDO)} \times 0.76 + E_{V(AOB)} \times 0.645$$

$$X_c = \frac{11309 \times 0.76 + 4424 \times 0.645}{15733} = 0.728 \text{ m}$$

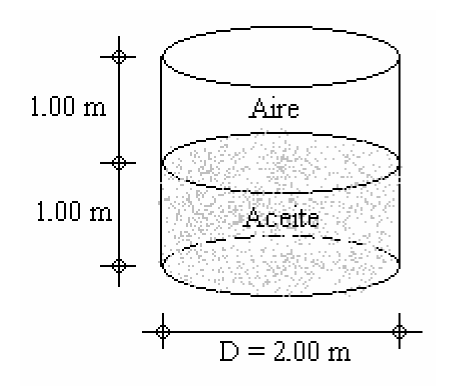
$$F_T = \sqrt{14130^2 + 15733^2} = 21146 \text{ kg}$$

Determinación de la dirección y sentido de la fuerza

$$\text{tang}\phi = \frac{F_H}{F_v} = \frac{14130}{15733} = 0.898 \text{ m}$$

$\phi = 41^o \, 56'$ con el eje vertical y sentido hacia la derecha.

Problema 2.35
El deposito cilíndrico de la figura, de 2 m. de diámetro, está lleno hasta la mitad de aceite de peso específico relativo 0,80 y el resto con aire a una presión de 0,1 kg/cm^2.
Determinar:
a) La fuerza contra la tapa superior y su punto de aplicación
b) La fuerza contra el fondo y su punto de aplicación
c) Hacer un diagrama de presiones contra la pared lateral
d) La tensión horizontal máxima que debe resistir un anillo de 1 cm de pared lateral.
e) Si el depósito está asentado directamente sobre el terreno, calcular la fatiga de éste, siendo el peso propio del tanque de 1.5 Ton.



Determinación de la fuerza contra la tapa superior y su punto de aplicación

$$F_1 = p_{aire}\ A_1 = 0.1 \times 10^4 \times \frac{\pi}{4} 2.00^2 = 3140 \text{ kg}$$

Debido a que la presión es constante en la tapa, la fuerza actúa en el centro de gravedad de la misma.

Determinación de la fuerza contra la tapa inferior y su punto de aplicación

$$F_2 = 3140 + \gamma_{aceite}\ h\ A_1 = 3140 + 0.80 \times 1000 \times 1.00 \times \frac{\pi}{4} 2.00^2 = 5625 \text{ kg.}$$

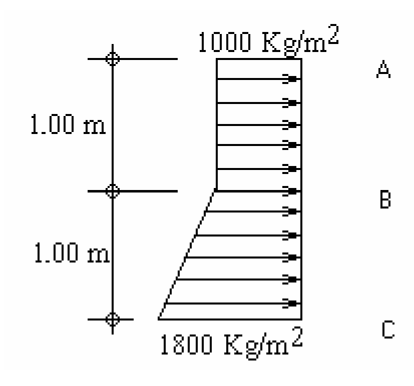
Esta fuerza está aplicada el centro de gravedad del fondo, según lo explicado anteriormente

Diagrama de presiones contra la pared lateral

$p_A = 0.1 \times 10^4 = 1000\ kg/m^2$

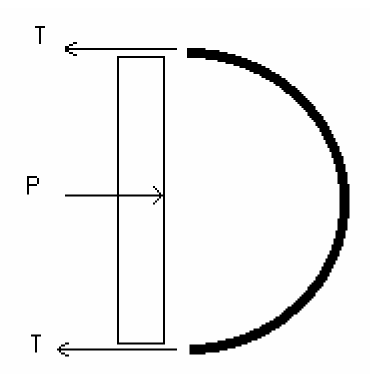
$p_B = 0.1 \times 10^4 = 1000\ kg/m^2$

$p_C = 1000 + 800 \times 1 = 1800\ kg/m^2$



Determinación de la fuerza horizontal máxima absorbida por las paredes laterales

Al observar un corte del cilindro se tiene



$T = p_{máx}\ D\ L$

Al despejar y sustituir se obtiene

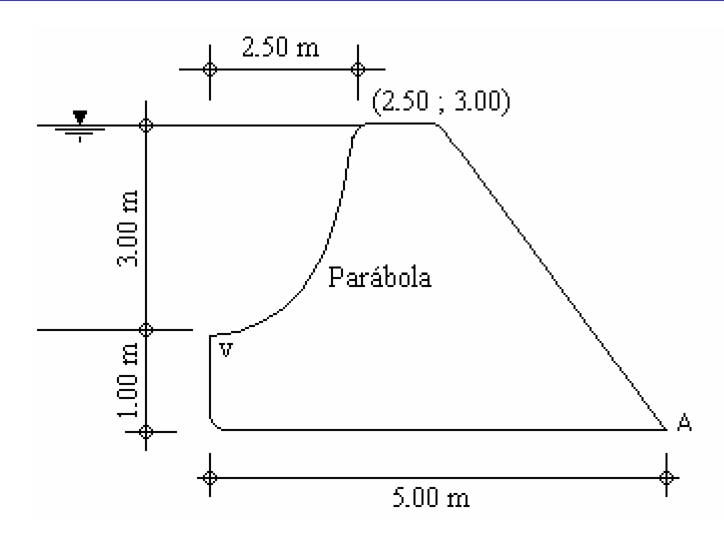
$$T\ =\ 1800\ \frac{2.00}{2}\ 0.01 = 18\ \text{kg}$$

Determinación de la fatiga del terreno

$$\sigma_{terr.} = \frac{F_V}{A_1} = \frac{5652 - 3140 + 1500}{\frac{\pi}{4}\ 2.00^2} = 1278\ \text{kg/m}^2 \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_{terr.} = 0.1278\ \ \text{kg/cm}^2$$

Problema 2.36

En el muro de retención de agua de mar mostrado en la figura cuál es el momento respecto al punto A por la acción exclusiva del agua de mar ($\gamma\ =\ 1025\ \ \text{kg/m}^3$)?



La fuerza vertical es igual al peso del volumen de líquido sobre la superficie curva, el cual es igual al área entre la superficie curva, la superficie del líquido y el eje Y, multiplicada por el ancho de la compuerta y por el peso específico del líquido.
La ecuación de la parábola puede expresarse como

$$y = K\ x^2$$

La cual debe satisfacerse para el punto de coordenadas (2.50; 3.00); es decir,

$$3.00 = K \times 2.50^2 \qquad \Rightarrow\ K = 0.48$$

de donde, la ecuación de la parábola es

$$y = 0.48\ x^2$$

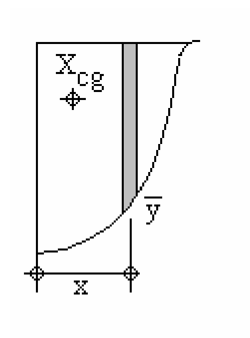
El área descrita anteriormente se pude calcular mediante integración como

$$dA = (3 - y)\,dx$$

$$A = \int_0^{2.5} (3 - 0.48\ x^2)\,dx = \left[3x - \frac{0.48\ x^3}{3}\right]_0^{2.5} = 5.00\ m^2$$

$$F_V = 5.00 \times 1025 = 5125\ \ kg$$

La fuerza vertical actúa en el centro de gravedad del área determinada anteriormente. Este de acuerdo a la siguiente figura

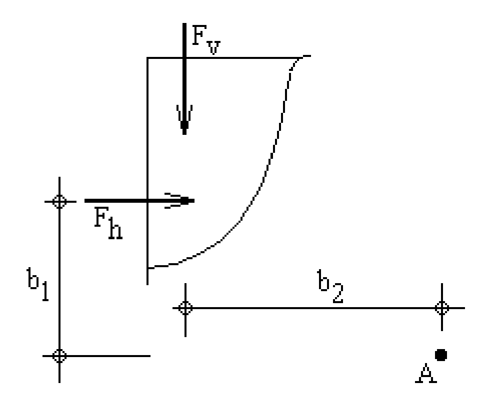


como

$$X_{cg}\ A = \int_0^{2.5} (3 - 0.48\ x^2)\ x\ dx$$

$$X_{cg} = \frac{\left[\frac{3\ x^2}{2} - \frac{0.48\ x^4}{4}\right]_0^{2.5}}{5.00} = 0.94\ \text{m}$$

La fuerza vertical actúa a una distancia b_2 según lo indicado en la siguiente figura



$$b_2 = 5.00 - 0.94 = 4.06\ \text{m}$$

Determinación de la fuerza horizontal

$$F_H = \frac{1}{2}\ \gamma\ H^2\ L = \frac{1}{2}\ 1025 \times 3.00^2 \times 1.00 = 4612.5\ \text{kg}$$

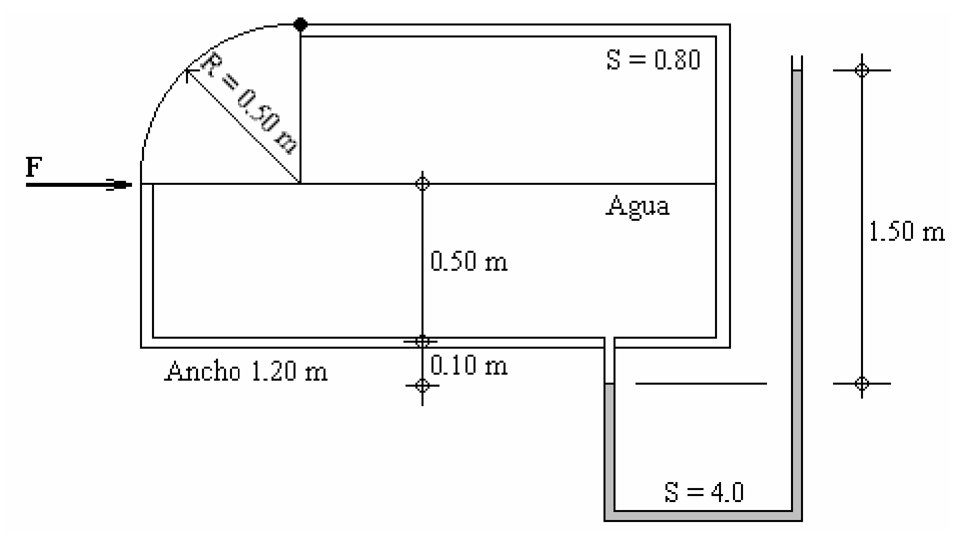
La fuerza horizontal actúa a una distancia b_1 según lo indicado en la figura anterior

$$b_1 = 1.00 + \frac{1}{3} \times 3.00 = 2.00\ \text{m}$$

El momento respecto al punto A es

$$Ma = 4612.50 \times 2 - 5125 \times 4.06 = -11582.50\ \text{kg m}$$

Problema 2.37
Calcular, mediante integración, la fuerza F necesaria para mantener la compuerta de la figura en la posición indicada. Considerar que el ancho de la compuerta es de 1.20 m.



Determinación de la presión en el punto O

$po + 0.80 \times 800 \times 0.50 + 1000 \times 0.60 - 4000 \times 1.50 = 0$

$po = 5000 \ kg/m^2$

La presión p_1, a una altura h, medida verticalmente desde el punto O es

$p_1 = 5000 + \gamma \ h = 5000 + \gamma \ 0.50 \ (1 - \cos\alpha)$

El diferencial de fuerza que actúa sobre el diferencial de área es

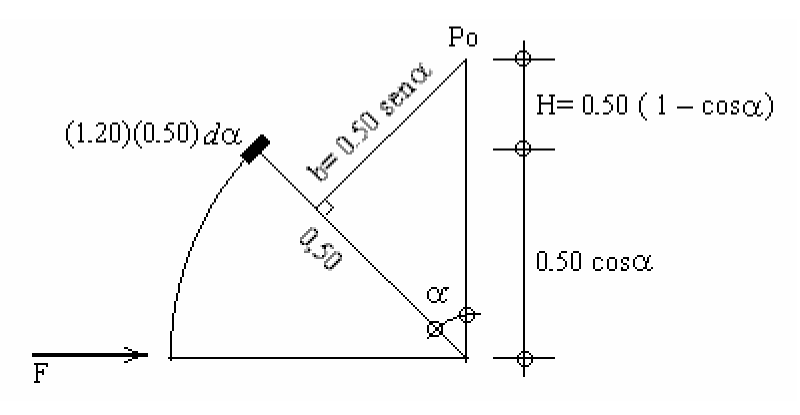
$dF_1 = [5000 + \gamma \times 0.50 \times (1 - \cos\alpha)] \times 0.50 \times d\alpha \times 1.20$

El diferencial de momento, respecto al punto O es

$dM = dF_1 \times b$

Al sustituir se obtiene

$dM = [5000 + \gamma \ 0.50 \ (1 - \cos\alpha)] \ 0.50 \times 1.20 \ d\alpha \ (0.50 \ sen\alpha)$



El momento total se obtiene al integrar ente 0 y $\frac{\pi}{2}$

$$M = 0.30 \int_0^{\pi/2} \left[5000 + \gamma\ 0.50\ (1 - \cos\alpha)\right] \operatorname{sen}\alpha\ d\alpha$$

$$M = 0.3 \times \int_0^{\pi/2} 5000\ \operatorname{sen}\alpha\ d\alpha + \gamma\ 0.50\ \operatorname{sen}\alpha\ d\alpha - \gamma\ 0.50\ \operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha\ d\alpha$$

Como

$\operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha = \dfrac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2}$ entonces se tiene:

$$M = 0.30 \left\{ -5000 \left[\cos\ \alpha\right]_0^{\pi/2} - \gamma\ 0.50\ \left[\cos\alpha\right]_0^{\pi/2} - \frac{\gamma\ 0.50}{2} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2\alpha\ d\alpha \right\}$$

Como

$$\frac{d}{d\,\alpha}(\cos 2\ \alpha) = -2 \operatorname{sen} 2\alpha$$

entonces

$$M = 0.30 \left\{ 5000 + \gamma\ 0.50 + \frac{\gamma\ 0.50}{4} \left[\cos 2\alpha\right]_0^{\pi/2} \right\}$$

$$M = 0.30 \left\{ 5000 + \gamma\ 0.50 + \frac{\gamma\ 0.50}{4} (-1\ -1) \right\}$$

$$M = 0.30 \left\{ 5000 + \gamma\ 0.50 - \frac{\gamma\ 0.50}{2} \right\}$$

$$M = 0.30 \left\{ 5000 + 800 \times 0.50 - \frac{800 \times 0.50}{2} \right\}$$

$$M = 0.30\ \left\{5200\right\} = 1560\ \text{kg m}$$

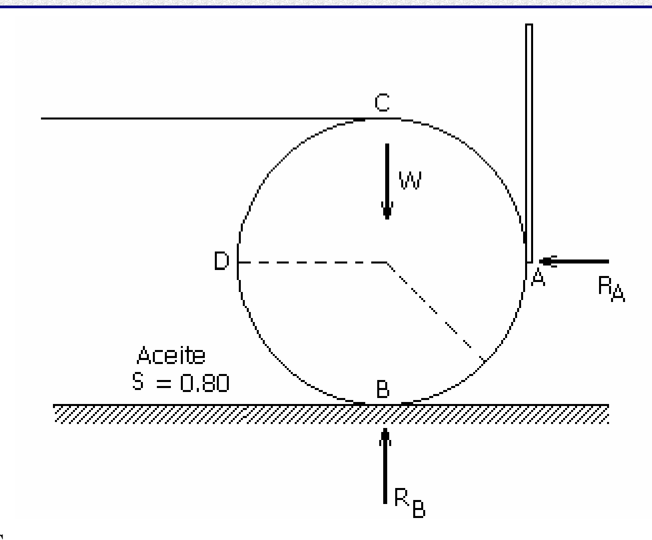
Para que la compuerta se encuentre cerrada, el momento producido por la fuerza externa F, respecto al punto O debe ser igual al producido por la acción del agua, determinado anteriormente; así,

$F \times 0.50 = 1560$

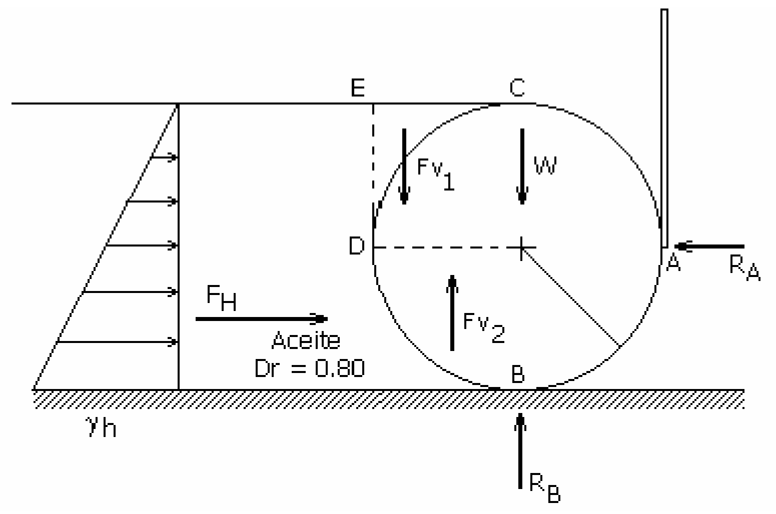
de donde,

$$F = \frac{1560}{0.50} = 3120\ \text{kg.}$$

Problema 2.38
El cilindro de la figura, de 2.00 m de diámetro pesa 2500 kg. y tiene una longitud de 1.50 m. Determinar las reacciones en A y B despreciando el rozamiento.



Esquemas de fuerzas



Determinación de la fuerza horizontal producida por la acción del aceite.

$$F_H = \frac{1}{2}\gamma h^2 L = \frac{1}{2}\ 0.8 \times 1000 \times 2.00^2 \times 1.50 = 2400 \text{ kg}$$

La condición de equilibrio horizontal indica que

$$F_H - R_A = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_A = F_H = 2400 \text{ kg}$$

Determinación de la fuerza vertical producida por el aceite

$$F_V = F_{V2} - F_{V1}$$

La fuerza vertical en la zona BD es hacia arriba e igual al peso del volumen de agua desplazada, es decir, el área A_{BCDE} multiplicada por la longitud del cilindro y por el peso específico del líquido; así,

$F_{V2} = \gamma A_{BCDE} L$

La fuerza vertical en la zona CD es hacia abajo e igual al peso del volumen de agua que se wncuentra sobre la superficie, es decir, el área A_{DEC} multiplicada por la longitud del cilindro y por peso específico del líquido; así,

$F_{V1} = \gamma A_{DEC} \times L$

La fuerza vertical resultante es

$F_V = \gamma L (A_{BCED} - A_{DEC})$ y hacia arriba

simplificando se obtiene

$F_V = \gamma L A_{BCD}$

y al sustituir los valores numéricos resulta

$$F_V = 800 \times 1.5 \times \left(\frac{\pi \, 1.00^2}{2} \right) = 1885 \text{ kg}$$

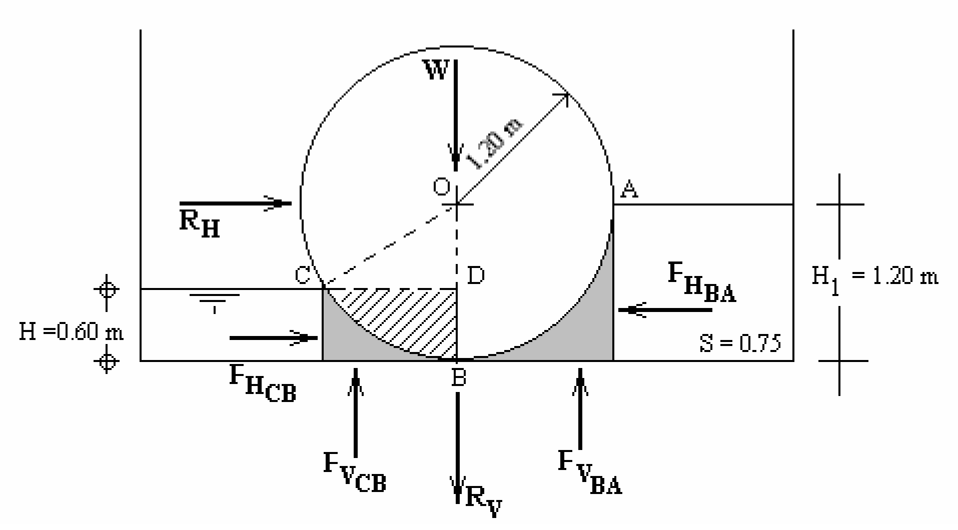
La condición de equilibrio vertical indica que

$F_V + R_B = W$

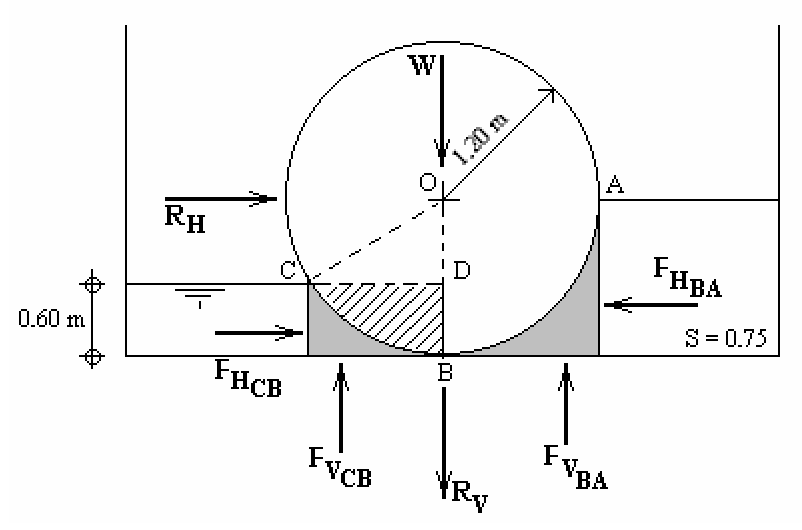
$R_B = W - F_V$

$R_B = 2500 - 1885 = 615$ kg

Problema 2.39
El cilindro de la figura de 2.40 m de diámetro, pesa 250 kg y reposa sobre el fondo de un depósito de 1.00 m de longitud; si se vierte agua y aceite en la parte izquierda y derecha respectivamente, hallar los módulos de las componentes de las fuerza horizontal y vertical que mantienen el cilindro justamente en contacto en el depósito.



Esquemas de fuerzas



Determinación de las fuerzas horizontales

$$F_{H(BC)} = \frac{1}{2}\ \gamma H^2\ L = \frac{1}{2}\ 1000 \times 0.60^2 \times 1.00 = 180\ \text{kg}$$

$$F_{H(BA)} = \frac{1}{2}\ \gamma H_1^2\ L = \frac{1}{2}\ 750 \times 1.20^2 \times 1.00 = 540\ \text{kg}$$

La condición de equilibrio horizontal indica que

$R_H + F_{H(CB)} - F_{H(BA)} = 0$

de donde,

$R_H = F_{H(BA)} - F_{H(CB)} = 540 - 180 = 360$ kg

Determinación de las fuerzas verticales

La fuerza vertical producida por el agua es igual al peso del volumen desalojado; es decir, el área CDB multiplicada por la longitud y el peso específico

$F_{V(BC)} = (\text{Area}_{(COB)} - \text{Area}_{(COD)})\ L\ \gamma$

$$\text{Angulo (COB)} = \text{arc cos}\left(\frac{0.6}{1.2}\right) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow 60^{\circ}$$

La distancia CD es igual a $\sqrt{1.20^2 - 0.60^2} = 1.04$ m

$$F_{V(CB)} = \left(\frac{1}{6}\pi\, 1.20^2 - \frac{1.04 \times 0.6}{2}\right) \times 1.00 \times 1000$$

$F_{V(CB)} = 331$ kg

La fuerza vertical producida por el aceite es igual al peso del volumen desalojado; es decir, el área ABO multiplicada por la longitud y el peso específico

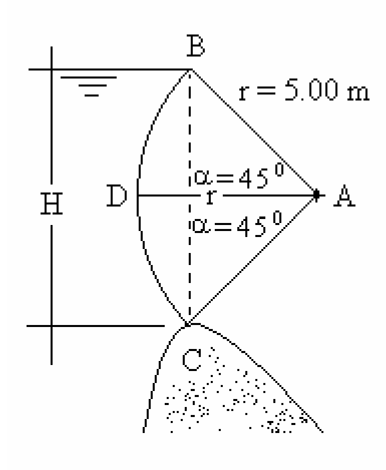
$$F_{V(BA)} = \left(\frac{1}{4}\pi\, 1.20^2\right) 1.00 \times 0.75 \times 1000 = 848 \text{ kg}$$

La condición de equilibrio vertical indica que

$Rv = F_{V(CB)} + F_{V(BA)} - W$

$Rv = 331 + 848 - 250 = 929$ kg

Problema 2.40
Hallar las fuerzas horizontales y verticales sobre la compuerta radial de 1.00 m. de ancho que se muestra en la figura y el momento que ellas producen respecto al eje de giro A.



Determinación de la altura H

$$\text{sen } 45 = \frac{\left(\frac{H}{2}\right)}{5.00} \quad \Rightarrow \; H = 5.00 \text{ x } 2 \text{ sen } 45° = 7.07 \text{ m.}$$

Determinación de la fuerza vertical producida por el agua sobre la compuerta.

F_V = Peso del volumen de agua desalojado por la compuerta

$Fv = [Area_{(ABDC)} - Area_{(ABC)}]\ 1000\ \gamma$

$$F_V = \gamma \left(\frac{\pi r^2}{4} - \frac{H\left(\frac{H}{2}\right)}{2} \right) 1.00$$

Al sustituir resulta

$$F_V = 1000 \left(\frac{3.14 \text{ x } 5^2}{4} - \frac{7.07 \text{ x } 3.54}{2} \right)$$

$$F_V = 1000\,(19.63 - 12.51) = 7120 \text{ kg}$$

Determinación de la fuerza horizontal producida por el agua sobre la compuerta

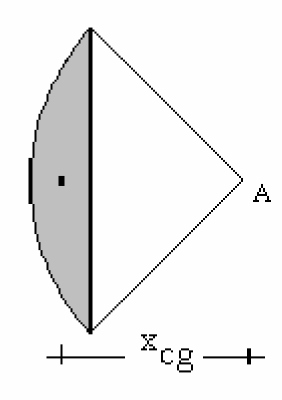
$$F_H = \frac{1}{2}\ \gamma\ H^2\ L$$

$$F_H = \frac{1}{2} \text{ x } 1000 \text{ x } 7.07^2 \text{ x } 1.00 = 24992 \text{ kg}$$

Determinación de los puntos de aplicación

La fuerza vertical se encuentra aplicada en el centro de gravedad del volumen desalojado, el cual se calcula mediante

$$X_{cg} = \frac{4\,r}{3}\ \frac{(\text{Sen } \alpha)^3}{(2\,\alpha - \text{Sen } 2\alpha)}$$



$$X_{cg} = \frac{4 \text{ x } 5}{3}\ \frac{\left(\text{Sen } 45^0\right)^3}{\left(2\,\frac{\pi}{4} - \text{Sen}\left(2 \text{ x } 45^0\right)\right)}$$

$X_{cg} = 4.13$ m (desde el centro)

La fuerza horizontal se encuentra aplicada a $\frac{2}{3}$ H desde la superficie; es decir,

$$Y_{cp} = \frac{2}{3} \times 7.07 = 4.71 \text{ m}$$

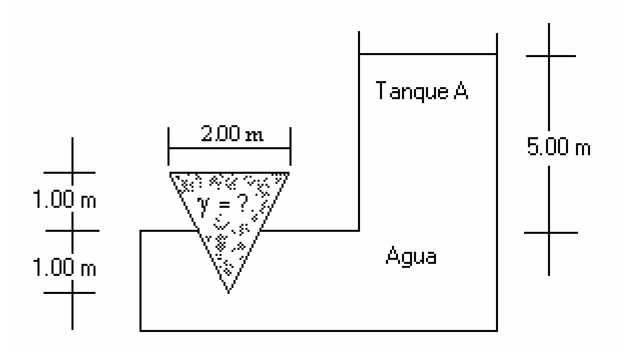
Determinación del momento respecto al punto A

$$\sum M_A = F_H \left(Y_{cp} - \frac{H}{2} \right) - F_v X_{cg}$$

$$\sum M_A = 24992 \times (4.71 - 3.535) - 7120 \times 4.13$$

$$\sum M_A \approx 0 \text{ kg m}$$

Problema 2.41
Calcular el mínimo valor de γ para que la válvula cónica mostrada en la figura, mantenga el agua en el tanque A con una altura H igual a 5 m.

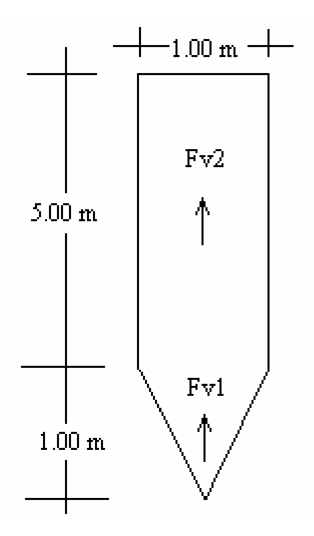


Determinación del peso W de la válvula cónica

$$W = \gamma \frac{1}{3} \frac{\pi}{4} \times 2.00^2 \times 2.00$$

$$W = \frac{2}{3} \gamma \pi$$

Esquema de las fuerzas verticales producidas por el agua



Determinación de la fuerza vertical producida por el agua

$$F_V = F_{V1} + F_{V2}$$

$$F_V = 1000 \ \frac{1}{3}\ \frac{\pi}{4}\ 1.00^2 \ \text{x}\ 1.00 \ + \ 1000\ \frac{\pi}{4}\ 1.00^2 \ \text{x}\ 5.00$$

La condición de equilibrio vertical indica que

$$F_{V1} + F_{V2} = W$$

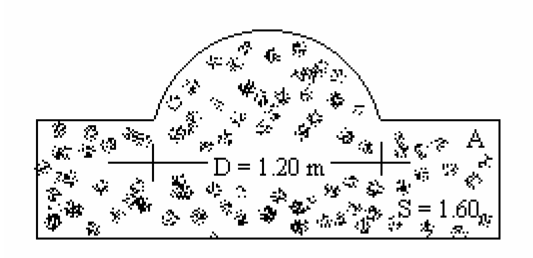
$$\frac{2}{3}\ \gamma\ \pi = 1000\ \pi \ \text{x} \left(\frac{1}{12} + \frac{5}{4} \right)$$

$$\frac{2}{3}\ \gamma = 1000 \ \text{x} \left(\frac{1+15}{12} \right)$$

$$\gamma = 1000 \ \text{x}\ \frac{3}{2}\ \text{x} \left(\frac{16}{12} \right)$$

$$\gamma = 2000 \ \text{kg/m}^3$$

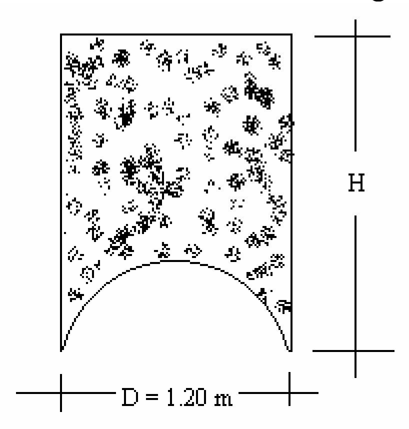
Problema 2.42
Calcular la fuerza vertical que actúa sobre la bóveda semiesfera mostrada en la figura, si la presión en A es de 0.60 kg/cm^2 y la densidad relativa del liquido 1.60.



La altura H imaginaria donde la presión es cero es

$$H = \frac{p_A}{\gamma} = \frac{0.6 \times 10^4}{1.6 \times 10^3} = 3.75 \text{ m}$$

El volumen desalojado por la semiesfera se muestra en la siguiente figura



Este volumen es igual al volumen del cilindro menos el volumen de la semiesfera

El volumen de una esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$, por lo tanto el volumen desalojado es

$$V = \frac{\pi}{4} \times 1.20^2 \times 3.75 - \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi \times 0.60^3 = 4.24 - 0.45 = 3.79 \text{ m}^3$$

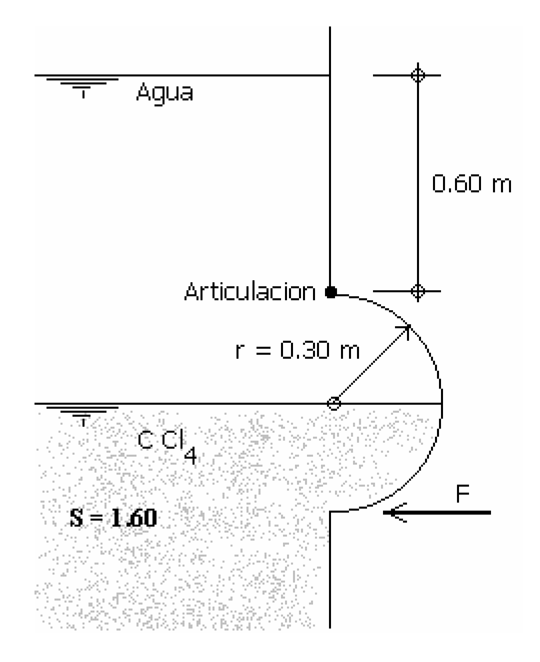
La fuerza vertical es el volumen desalojado multiplicado por el peso específico del líquido, es decir,

$F_V = 3.79 \times (1.60 \times 1000) = 6064$ kg y actúa hacia arriba

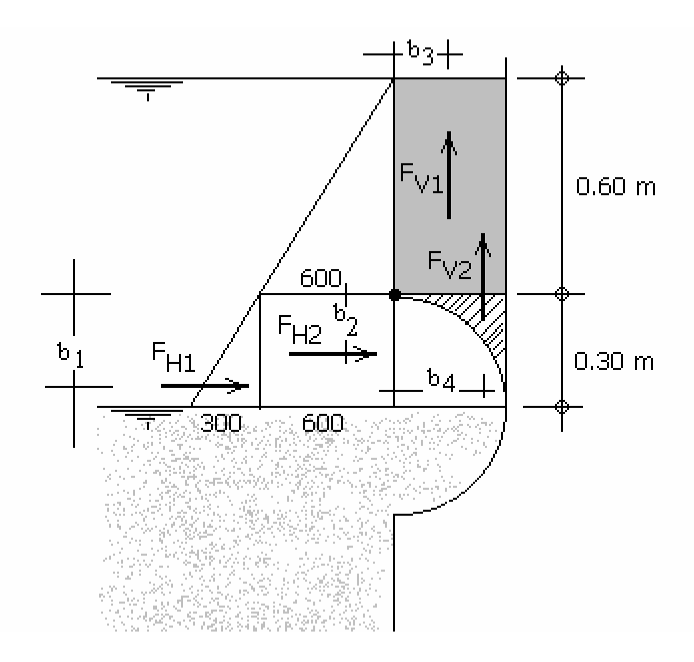
Problema 2.43

Calcular en el esquema de la figura

a) Fuerza horizontal producida por H_2O.
b) Fuerza vertical producida por H_2O.
c) Fuerza horizontal producida por $C\ Cl_4$.
d) Fuerza vertical producida por $C\ Cl_4$.
e) El valor de F para que la compuerta no se abra.



Esquemas de las fuerzas sobre la compuerta en contacto con el H_2O



Determinación de las fuerzas horizontales y sus puntos de aplicación

$F_{H1} = \dfrac{300 \times 0.3}{2} \times 1.00 = 45 \text{ kg}$ y $b_1 = \dfrac{2}{3} \times 0.30 = 0.20$ m desde A

$F_{H2} = 600 \times 0.3 \times 1.00 = 180 \text{ kg}$ y $b_2 = \dfrac{1}{2} \times 0.30 = 0.15$ m desde A

La fuerza horizontal total es

$F_H = F_{H1} + F_{H2} = 225 \text{ kg}$

Determinación de las fuerzas verticales y sus puntos de aplicación

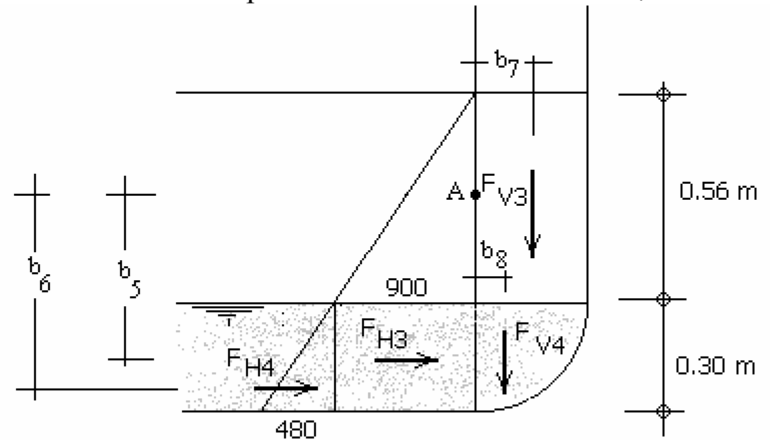
$F_{V1} = 0.60 \times 0.30 \times 1000 \times 1.00 = 180$ kg y $b_3 = \frac{1}{2} \times 0.30 = 0.15$ desde A

$F_{V2} = \left(0.30^2 - \frac{\pi}{4}\ 0.30^2\right) \times 1.00 \times 1000 = 19.4$ kg y $b_4 = \frac{2}{3} \times \frac{0.30}{(4 - \pi)} = 0.23$ desde A

La fuerza vertical total es

$F_V = F_{V1} + F_{V2} = 199.40$ kg

Esquemas de las fuerzas sobre la compuerta en contacto con el C Cl_4



Sustitución de la capa de H_2O por una altura de C Cl_4 de tal manera que la presión en la interface de los dos líquidos sea la misma

$p = 0.9 \times 1000 = 900\ kg / m^2 \Rightarrow y = \frac{p}{\gamma} = \frac{900}{1600} = 0.56$ m

Determinación de las fuerzas horizontales y sus puntos de aplicación

$F_{H3} = 900 \times 0.30 \times 1.00 = 270$ kg y $b_5 = \frac{0.30}{2} + 0.30 = 0.45$ m desde A

$F_{H4} = \frac{480}{2} \times 0.3 \times 1.00 = 72$ kg y $b_6 = \frac{2}{3} \times 0.30 = 0.50$ m desde A

La fuerza horizontal total es

$F_H = 270 + 72 = 342$ kg

Determinación de las fuerzas verticales y sus puntos de aplicación

$F_{V3} = 0.56 \times 0.30 \times 1600 \times 1.00 = 268$ kg y $b_7 = \frac{0.30}{2} = 0.15$ m desde A

$F_{V4} = \frac{\pi \times 0.3^2}{4} \times 1600 \times 1.00 = 113$ kg y $b_8 = \frac{4}{3} \times \frac{0.3}{\pi} = 0.13$ m desde A

$F_V = 268 + 113 = 381$ kg

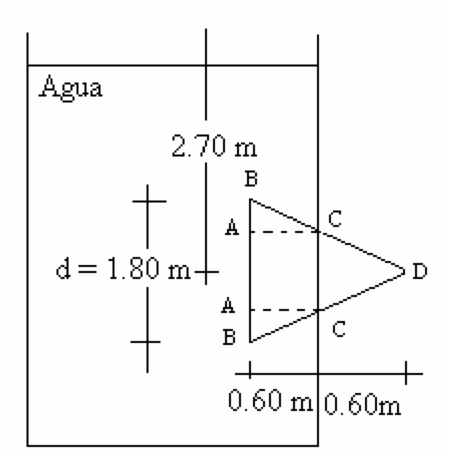
La condición de equilibrio indica que la sumatoria de momentos respecto a la articulación debe ser cero, es decir, $\sum M_A = 0$

$$- F_{H1}\, b_1 - F_{H2}\, b_2 - F_{V1}\, b_3 - F_{V2}\, b_4 - F_{H3}\, b_5 - F_{H4}\, b_6 + F_{V3}\, b_7 + F_{V4}\, b_8 + 0.60\, F = 0$$

$$-45 \times 0.20 - 180 \times 0.15 - 180 \times 0.15 - 19.4 \times 0.23 - 270 \times 0.45 - 72 \times 0.50 + 268 \times 0.15 + 113 \times 0.13 + 0.60\ - F_X = 0$$

$F = 267$ kg.

Problema 2.44
Calcular la magnitud y dirección de la fuerza horizontal y de la fuerza vertical producida por el agua sobre el tapón cónico mostrado en la figura.



La fuerza horizontal, que actúa en el anillo AB, es hacia la derecha e igual en magnitud a la fuerza horizontal que actúa sobre el anillo BC pero actúa hacia la izquierda por lo tanto se anulan.

La fuerza que actúa en la zona central (AA) de la base del cono es

$$F = \gamma\, \bar{h}\, A$$

$$F_H = 1000 \times 2.70 \times \frac{\pi}{4} \times (0.90)^2$$

$$F_H = 1716 \text{ kg}$$

La fuerza vertical total es igual a la fuerza producida en la zona inferior del cono menos la fuerza producida en la zona superior del cono; es decir, igual al peso del volumen del sumergido; así,

F_V = Peso volumen sumergido o desplazado

$$F_V = \gamma\ V_S$$

$$F_V = 1000 \times \left(\frac{1}{3}\frac{\pi}{4} 1.80^2 \times 1.20 - \frac{1}{3}\frac{\pi}{4}\ 0.90^2 \times 0.60 \right)$$

$$F_V = 890 \text{ kg}$$

Problema 2.45
Cuántos kilogramos de concreto, W_c, de peso específico $\gamma_c = 2400$ kg / m^3, deben unirse a una pieza de madera que tiene un volumen de 0.1 m^3 y una densidad relativa de 0.65, para que el conjunto se hunda en el agua.

Por encontrarse el conjunto en equilibrio, la sumatoria de fuerzas verticales indica que

$$W_m + W_c = E_m + E_c$$

Determinación del peso de la pieza de madera

$$\gamma_m = \frac{W_m}{V_m} \qquad \Rightarrow \qquad W_m = \gamma_m V_m$$

Determinación del volumen de concreto

$$\gamma_c = \frac{W_c}{V_c} \qquad \Rightarrow \qquad V_c = \frac{W_c}{\gamma_c}$$

Determinación del empuje de la pieza de madera

$$E_m = V_m \gamma$$

Determinación del empuje del concreto

$$E_c = V_c \gamma$$

Al sustituir en la ecuación de equilibrio se obtiene

$$\gamma_m V_m + W_c = V_m \gamma + \frac{W_c}{\gamma_c} \gamma$$

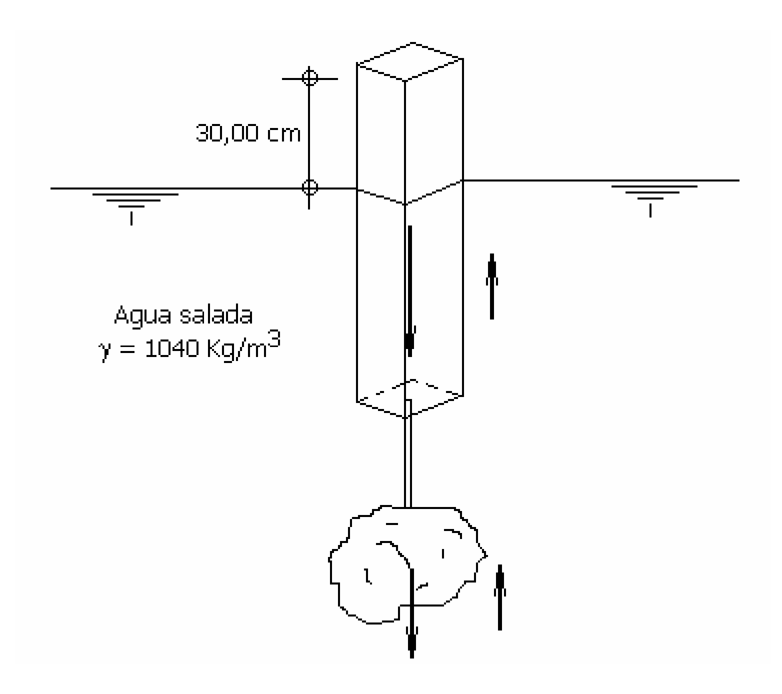
y al sustituir los valores numéricos

$$0.65 \times 1000 \times 0.1 + W_c = 0.10 \times 1000 + \frac{W_c}{2400} 1000$$

Al despejar

$$W_c = 60 \text{ kgs.}$$

Problema 2.46
Una pieza de densidad relativa 0.6 tiene sección cuadrada de 8 cm. de lado y 1.50 m. de longitud. Determinar cuántos kilogramos de plomo de peso específico 12000 kg/m^3 deben unirse a uno de los extremos de la pieza para que flote verticalmente con 30 cm. fuera del agua salada, de peso específico 1040 kg/m^3.



Por encontrarse, el conjunto, en equilibrio, la sumatoria de fuerzas verticales indica que

$W_m + W_p = E_p + E_m$

Al sustituir los valores numéricos obtenemos

$600 \times 0.08 \times 0.08 \times 1.50 + V_p \times 12000 = V_p\ 1040 + 1040 \times 1.20 \times 0.08 \times 0.08$

de donde,

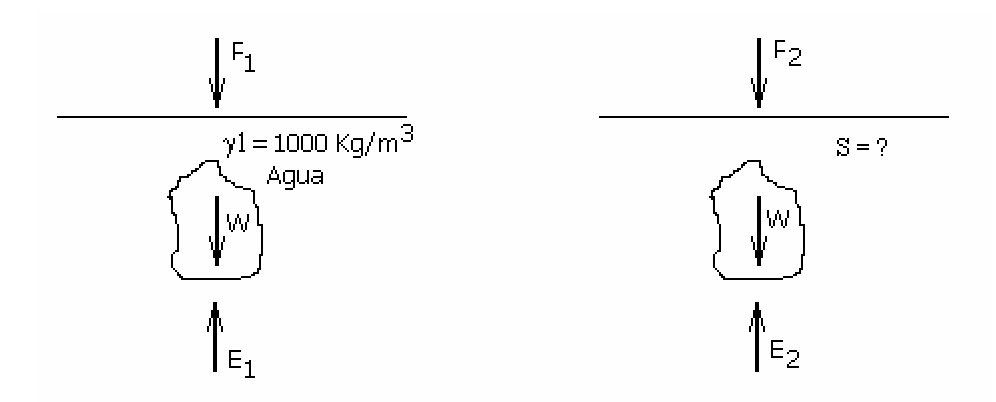
$$V_p = \frac{2.23}{10960} = 0.000203 \text{ m}^3$$

Entonces el peso necesario es

Peso de plomo (W_p) = $0.000203 \times 12000 = 2436$ kg.

Problema 2.47
Un cuerpo que tiene un volumen de 170 dm^3 requiere una fuerza de 27 kg. para mantenerlo sumergido en agua. Si para mantenerlo sumergido en otro líquido se necesita una fuerza de 16 kg, determinar la densidad relativa de este último líquido

El esquema de las fuerzas actuantes en ambos líquidos se muestra en la siguiente figura



Cuando el cuerpo está sumergido en agua, la sumatoria de fuerzas verticales indica que

$F_1 + W = E_1$

$27 + W = 1000 \times 170 \times 10^{-3}$

de donde,

$W = 143$ kg.

Cuando el cuerpo se encuentra sumergido en el líquido de peso específico γ la sumatoria de fuerzas verticales indica que

$16 + 143 = \gamma \times 170 \times 10^{-3}$

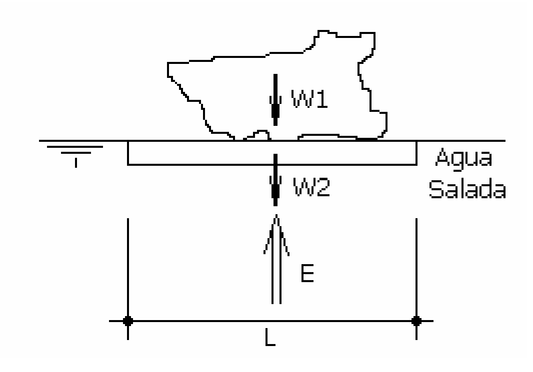
de donde,

$\gamma = 935 \text{ kg/m}^3$

La densidad relativa del líquido es

$$S = \frac{935}{1000} = 0.935$$

Problema 2.48
Qué longitud debe tener un tablón de madera de 7.5 cm x 30 cm de sección transversal y densidad relativa 0.50 para que en agua salada soporte un peso de 45 kg. Suponer que el peso específico del agua salada es de 1025 kg / m^3.



Por encontrarse, el conjunto, en equilibrio, la sumatoria de fuerzas verticales indica que

$E = W_1 + W_2$

$0.075 \times 0.30 \times L \times 1025 = 45 + 0.075 \times 0.30 \times L \times 500$

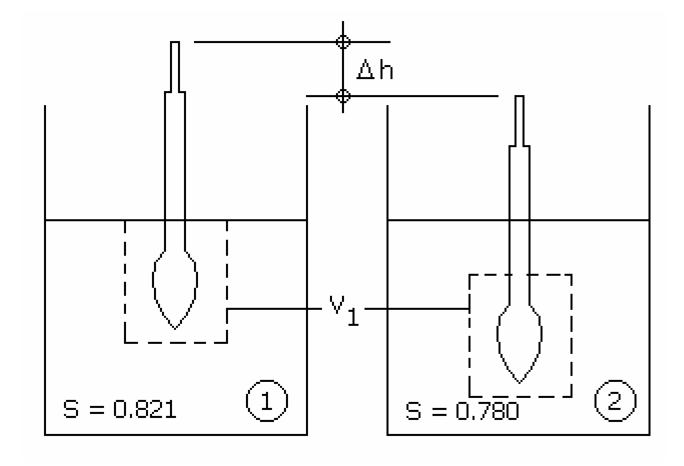
$23.05\ L = 45 + 11.25\ L$

$11.81 \times L = 45$

de donde,

$$L = \frac{45}{11.81} = 3.81 \text{ m.}$$

Problema 2.49
Un hidrómetro pesa 2.2 gr y el extremo superior es un vástago cilíndrico de 0.28 cm de diámetro. Cuál será la diferencia entre las longitudes de sumergencia del vástago cuando flota en aceite de densidad relativa 0.780 y en alcohol de densidad relativa 0.821.



Cuando el hidrómetro se encuentra sumergido en aceite la sumatoria de fuerzas verticales indica que

$W = E_1$

$2.2 \times 10^{-3} = 0.821 \times V_1$

de donde,

$$V_1 = \frac{2.2 \times 10^{-3}}{821} = 2.6797 \times 10^{-6} \ m^3$$

Cuando el hidrómetro se encuentra sumergido en alcohol la sumatoria de fuerzas verticales indica que

$W = E_2$

$$2.2 \times 10^{-3} = 0.780 \times 1000 \, (V_1 + \Delta V)$$

$$2.2 \times 10^{-3} = 0.780 \times 1000 \, (2.6797 \times 10^{-6} + \frac{\pi}{4} (0.28 \times 10^{-2})^2 \ \Delta h)$$

de donde

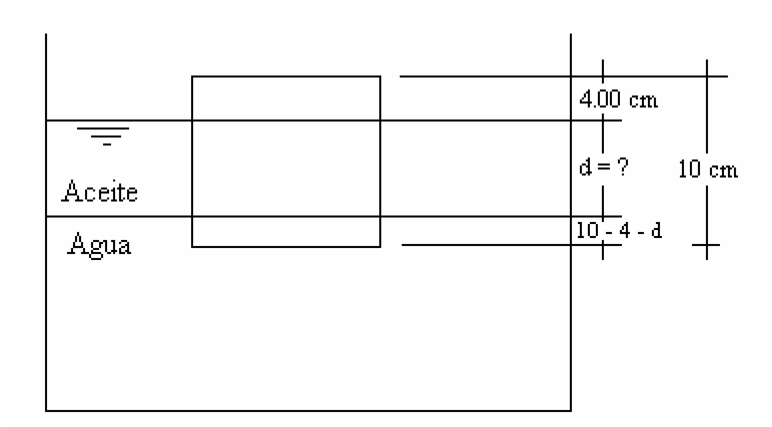
$$\Delta h = \frac{\left(\dfrac{2.2 \times 10^{-3}}{780}\right) - 2.6797 \times 10^{-6}}{\dfrac{\pi}{4} (0.28 \times 10^{-2})^2} = 0.0228 \ m$$

$\Delta h = 2.28$ cm

Problema 2.50

Un bloque cúbico de madera de 10 cm. de arista y de densidad relativa 0.5 flota en un recipiente con agua. Se vierte en el recipiente aceite de densidad relativa 0.8 hasta que la superficie superior de la capa de aceite se encuentre 4 cm. por debajo de la cara superior del bloque. Determinar:

a) El espesor de la capa de aceite.
b) La presión en la cara inferior.



Determinación del espesor de la capa de aceite

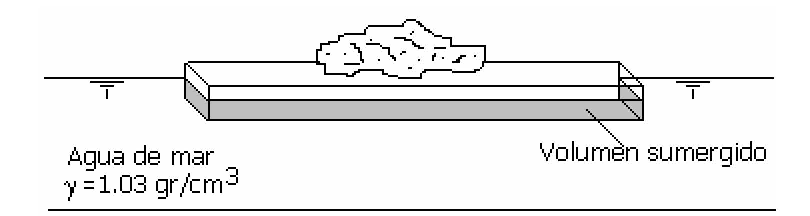
La sumatoria de fuerzas verticales indica que el peso del bloque de madera es igual al empuje producido por el agua más el producido por el aceite; así,

$W = E$
$W = \gamma_{ac} V_{ac} + \gamma_{ag} V_{ag}$
$0.5 \times 1000 \times 0.10 \times 0.10 \times 0.10 = 0.8 \times 1000 \times d \times 0.10 \times 0.10 + 1000 \times (0.06 - d) \times 0.10 \times 0.10$

Al despejar se obtiene
$d = 0.05$ m $\Rightarrow$ $d = 5$ cm

Determinación del la presión en la cara inferior
$P = \gamma_{ac} \; h_{ac} + \gamma_{ag} \; h_{ag}$
$p = 0.8 \times 1000 \times 0.05 + 1000 \times 0.01$
$p = 50 \; kg/m^2$

Problema 2.51
Sobre un paralelepípedo de madera, hay un cuerpo de densidad relativa 4, y de un volumen igual al 2 % del volumen del paralelepípedo; el conjunto flota en agua de mar de densidad 1.03, de forma tal que el 85.0 % de su volumen está sumergido. Si quitamos el cuerpo que está sobre la madera, que tanto por ciento del volumen permanece sumergido.



Por encontrarse el conjunto en equilibrio, la sumatoria de fuerzas verticales indica que

$E = W_1 + W_2$

$$1.03 \times 1000 \; \frac{85}{100} \; V = \gamma_m \; V + 4 \times 1000 \; \frac{2}{100} \; V$$

Al despejar se obtiene

$\gamma_m = 800 \; kg / m^3$

Al quitar el cuerpo que está sobre la madera se tiene la nueva condición de equilibrio, que es

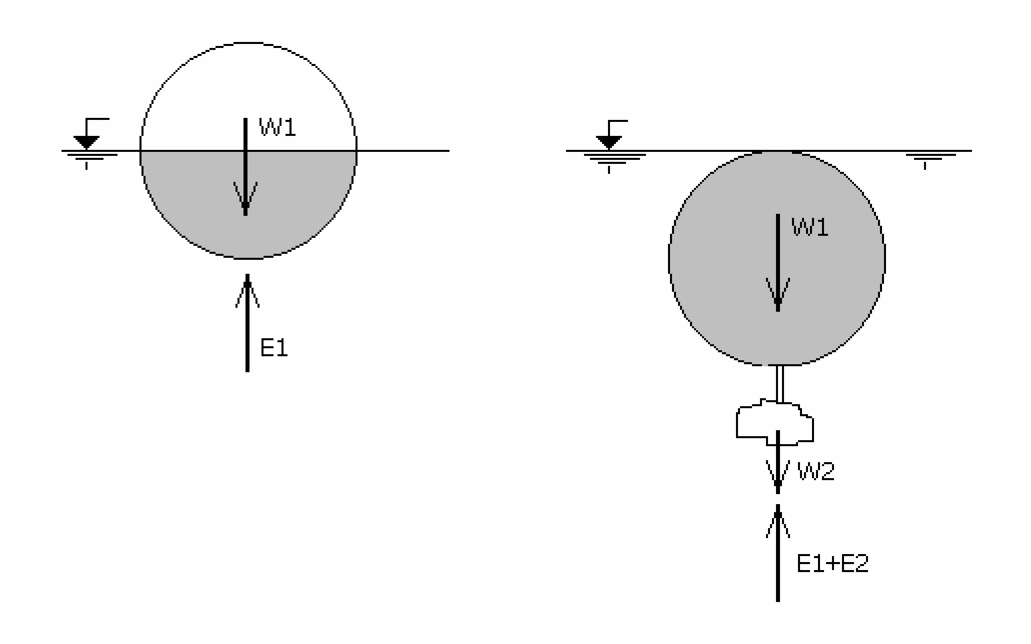
$E' = W_1$

$$1.03 \; \frac{P}{100} \; V = 800 \; V$$

$P = 77.6$ %

Problema 2.52
Una esfera de 120 cm de diámetro flota en agua salada de peso específico 1025 kg/m^3, con la mitad de ella sumergida. Determinar el mínimo peso de concreto, de peso específico 2400 kg/m^3, utilizado como anclaje, para sumergir completamente la esfera.

Esquema de las fuerzas que actúan sobre la esfera para las dos condiciones



Para el primer caso, la esfera se encuentra sumergida hasta la mitad y la condición de equilibrio indica que

$W_1 = E_1$

$W_1 = 1025 \text{ x } \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi \text{ x } 0.60^3$

$W_1 = 464 \text{ kg}$

Para el segundo caso, la esfera se encuentra completamente sumergida por la acción del anclaje de concreto y las condiciones de equilibrio indica que

$W_1 + W_2 = E_1 + E_2$

$464 + 2400 \; V_c = 1025 \; V_c + \frac{4}{3} \pi \text{ x } 0.60^3 \text{ x } 1025$

Al despejar se obtiene

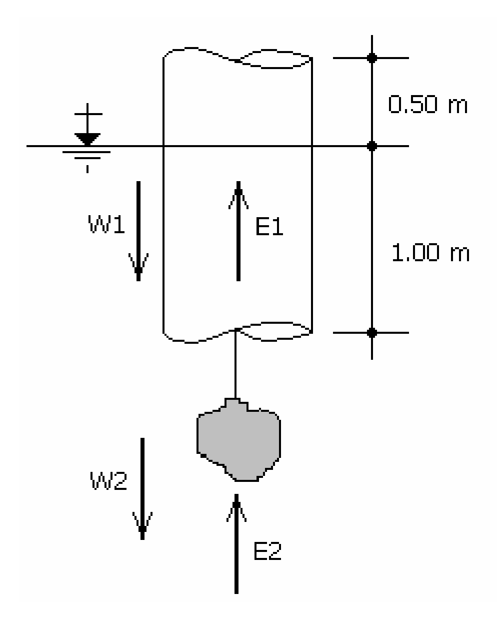
$V_c = 0.337 \text{ m}^3$

siendo el peso necesario igual a

$W_2 = 0.337 \times 2400 = 809$ kg.

Problema 2.53
Un cilindro hueco de 1.00 m. de diámetro y 1.50 m. de altura pesa 400 kg. Calcular el peso de plomo, de peso específico 11200 kg/m^3, que debe unirse al fondo por su parte exterior para que el cilindro flote verticalmente con 1.00 m del mismo sumergido en agua. Cuál sería el peso del plomo si este es encuentra colocado en la parte interior del cilindro.

Esquema de las fuerzas que actúan cuando el plomo está unido al fondo por la parte exterior



Cuando el plomo se encuentra en la parte exterior, la condición de equilibrio indica que.

$W_c + W_2 = E_c + E_{pl}$

$400 + 11200 \times V_{pl-1} = 1000 \times V_{pl} + 1000 \dfrac{\pi}{4} 1.00^2 \times 1.00$

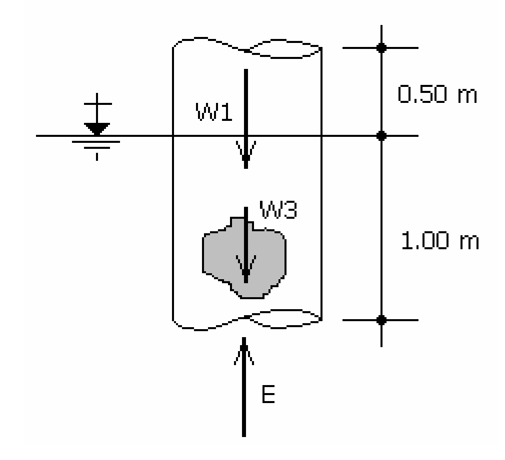
El volumen de plomo para la condición 1 es

$V_{pl-1} = 0.0377 \ m^3$

Por lo tanto el el peso necesario de plomo es

$W_2 = 11200 \times 0.0377 = 422.70$ kg

Esquema de las fuerzas que actúan cuando el plomo está unido al fondo por la parte interior



Cuando el plomo está en la parte exterior, la condición de equilibrio indica, que

$$W_c + W_3 = E_c$$

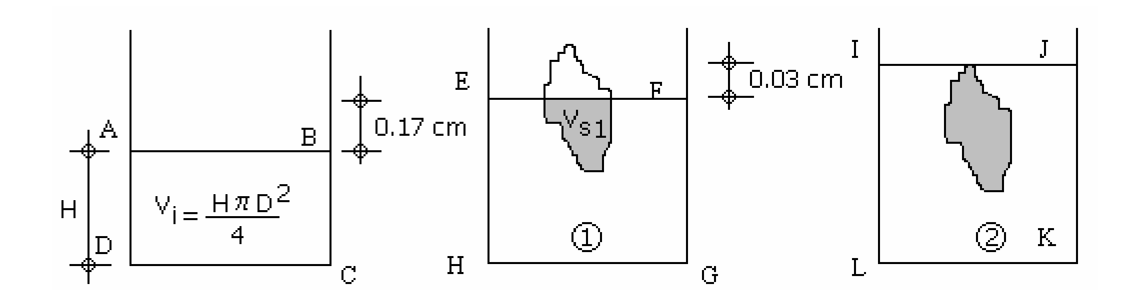
$$400 + W_3 = 1000 \frac{\pi}{4} 1.00^2 \text{ x } 1.00$$

y al despejar se obtiene

$$W_3 = 385 \text{ kg.}$$

Problema 2.54

En un recipiente cilíndrico se tiene agua a 4 º C hasta cierto nivel. Se hace flotar libremente un cuerpo de peso específico desconocido γ_c, con lo cual el nivel libre sube 17 cm sobre su posición inicial; si se sumerge completamente el mismo cuerpo, el nivel del agua sube 3 cm más. Determinar cuanto vale γ_c



Determinación los volúmenes

El volumen EFGH es igual al volumen ABCD más el volumen sumergido, cuando el cuerpo flota libremente; es decir,

$$V_{EFGH} = V_{ABCD} + V_{s1}$$

$$\frac{\pi}{4} D^2 (H + 0.17) = \frac{\pi}{4} H D^2 + V_{s1}$$

$$D^2 \frac{\pi}{4} H + \frac{\pi}{4} D^2 \; 0.17 = D^2 \frac{\pi}{4} H + V_{s1}$$

$$V_{s1} = \frac{\pi}{4} D^2 \; 0.17$$

El volumen IJKL es igual al volumen ABCD más el volumen total del cuerpo, cuando el cuerpo flota libremente; es decir,

$$V_{IJKL} = V_{ABCD} + V_t$$

$$D^2 \frac{\pi}{4} (H + 0.20) = H D^2 \frac{\pi}{4} + V_t$$

$$V_t = D^2 \frac{\pi}{4} 0.20$$

Cuando el cuerpo flota libremente la condición de equilibrio indica que

$$E = W$$

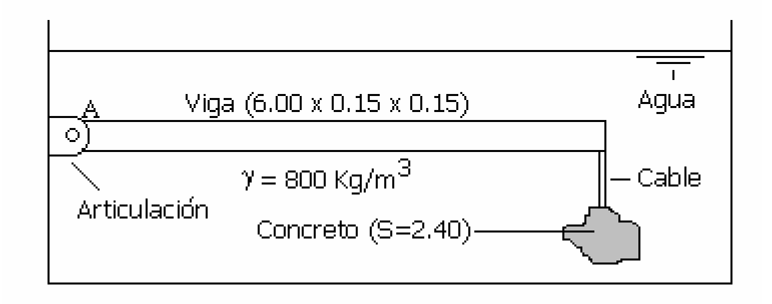
$$\gamma_{ag} V_{s1} = \gamma_c V_t$$

$$1000 \, D^2 \frac{\pi}{4} \; 0.17 = \gamma_c D^2 \frac{\pi}{4} \; 0.20$$

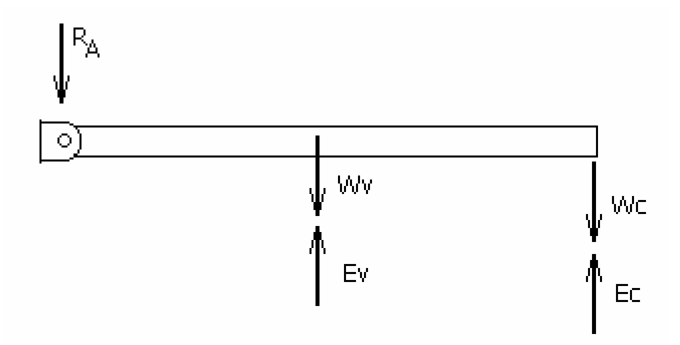
de donde,

$$\gamma_c = 850 \;\; kg/m^3$$

Problema 2.55
Calcular el peso de concreto, Wc, necesario, para mantener la viga mostrada en la figura en posición horizontal



Esquema de las fuerzas



La condición de equilibrio indica que la sumatoria de momentos respecto a la articulación debe ser cero para que la viga se encuentre en posición horizontal; es decir,

$$\sum M_A = 0$$

$$W_V \times 3.00 + W_C \times 6.00 - E_V \times 3.00 - E_C \times 6.00 = 0$$

como

$$\gamma_c = \frac{Wc}{Vc} \qquad \Rightarrow \qquad Vc = \frac{Wc}{\gamma_c}$$

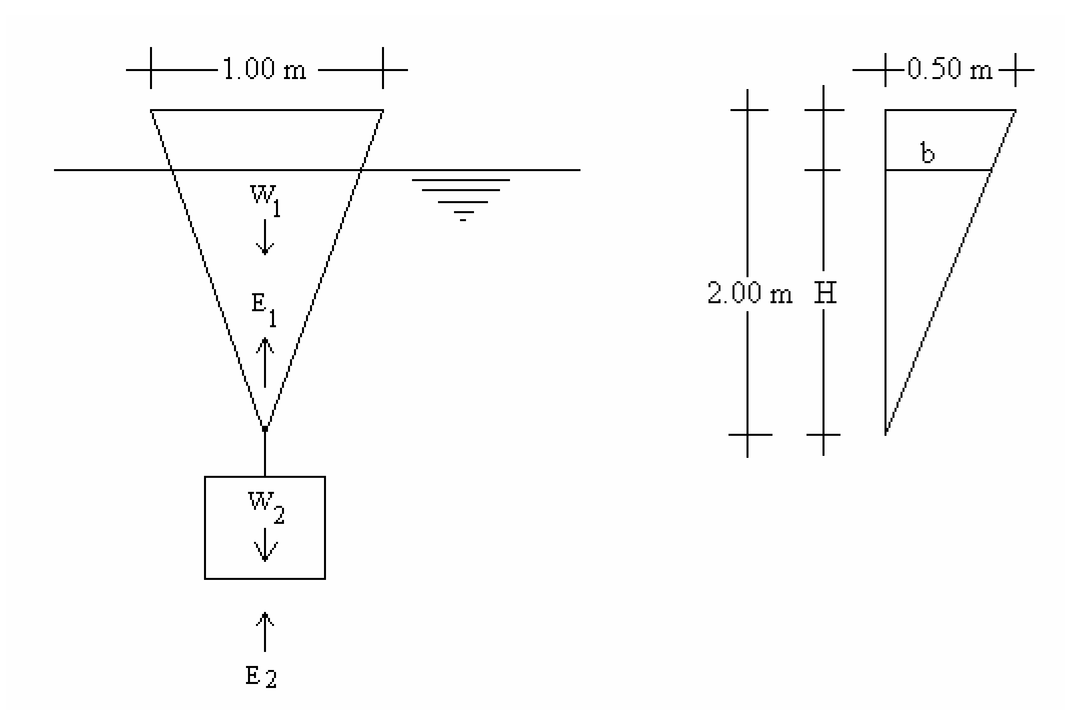
Al sustituir se obtiene

$$(800 \times 6.00 \times 0.15 \times 0.15) \times 3.00 + W_C \times 6.00 - (1000 \times 6.00 \times 0.15 \times 0.15) \times 3.00 - \frac{1000}{2400} Wc \times 6.00 = 0$$

Al despejar se obtiene

$$Wc = 23.14 \text{ kg}$$

Problema 2.56
Un bloque cúbico de concreto de densidad relativa 2.4 y de 0.40 m de arista se une al vértice de un cono de 1.00 m de diámetro y 2.00 m de altura. Si el peso específico es de 600 kg/m^3. Cuál será la profundidad sumergida del cono si el conjunto flota en agua.



Cuando el conjunto flota libremente en el agua, la condición de equilibrio vertical indica, que el peso del cono más el peso del bloque, es igual al empuje que soporta la parte sumergida del cono más el empuje que soporta el bloque; es decir,

$W_1 + W_2 = E_1 + E_2$

Determinación del peso del cono

$$W_1 = \frac{1}{3}\frac{\pi}{4}1.00^2 \text{ x } 2 \text{ x } 600 = 314 \text{ kg}$$

Determinación del peso del bloque

$W_2 = 0.40 \text{ x } 0.40 \text{ x } 0.40 \text{ x } 2400 = 153.6 \text{ kg}$

Determinación del empuje que soporta el bloque

$E_2 = 0.40 \text{ x } 0.40 \text{ x } 0.40 \text{ x } 1000 = 64 \text{ kg}$

Determinación del empuje que soporta la parte sumergida del cono

$$E_1 = \frac{1}{3}\frac{\pi}{4}\left(\frac{H}{2}\right)^2 H \text{ x } 1000 = 65.42 \, H^3$$

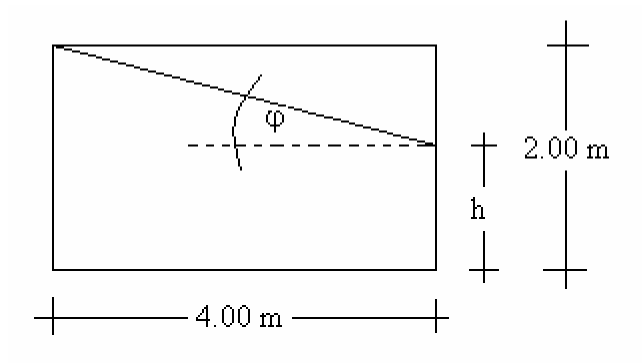
$314 + 153.6 = 64 + 65.42 \text{ x } H^3$

$$H^3 = \frac{314 + 153.6 - 64}{65.42}$$

de donde,

$H = 1.83 \text{ m}$

Problema 2.57
Un recipiente rectangular, con dimensiones de 4.00 m de largo, 2.00 m de alto y ancho B, se encuentra lleno de agua. Si se acelera, en la dirección de su longitud, determinar:
a) La aceleración, a_x, necesaria para que se derrame 1/6 del volumen de agua.
b) La fuerza necesaria para acelerar la masa líquida.



Determinación de la pendiente de la superficie del agua a partir de los volumenes

El volumen inicial es

$$V_{ini} = 2.00 \times 4.00 \times B = 8 \ B$$

El volumen derramado según lo exigido por las condiciones del problema es

$$\gamma_{der} = \left(\frac{1}{6}\right) 8 \ B = \frac{4}{3} \ B$$

por lo tanto el volumen final es

$$V_{final} = 8 \ B - \frac{4}{3} \ B$$

por otra parte, el volumen final del trapecio de agua, que queda en el recipiente es

$$V_{final} = \left(\frac{2.00 + h}{2}\right) \times 4.00 \times B$$

igualando ambas expresiones se obtiene

$$\left(8 - \frac{4}{3}\right) B = \left(\frac{2.00 + h}{2}\right) \ 4.00 \ B$$

Al despejar resulta

$$h = 1.33 \text{ m}$$

La pendiente de la superficie del líquido es

$$\text{tg } \varphi = \frac{2 - 1.33}{4} = \frac{0.67}{4}$$

según la ecuación de aceleración lineal

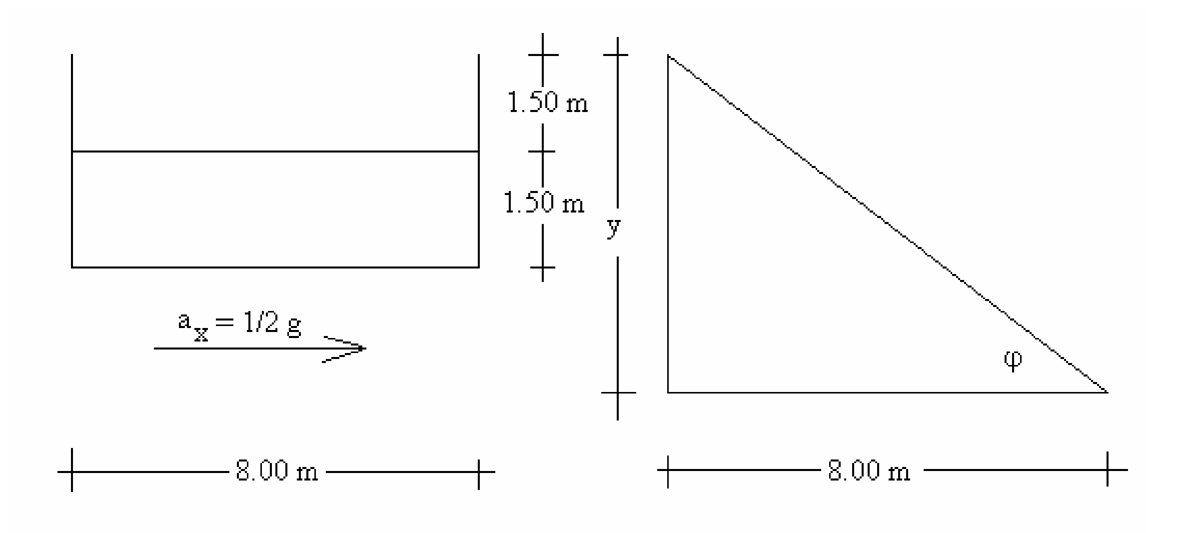
$$\text{tg } \varphi = \frac{a_x}{g} \quad \Rightarrow \quad a_x = \frac{0.67}{4} \text{ x } 9.81$$

$$a_x = 1.64 \text{ m/s}^2$$

Problema 2.58

Un depósito rectangular de 8.00 m de longitud, 3.00 m de profundidad y 2.00 m de ancho contiene 1.50 m. de agua. Si está sometido a una aceleración horizontal en la dirección de su longitud de ½ g. Determinar:

a) Si el agua se derrama del depósito y calcular este volumen.
b) Calcular la fuerza total sobre cada uno de los extremos del depósito debido a la acción del agua.
c) Demostrar que la diferencia entre estas fuerzas es igual a la fuerza no equilibrada necesaria para acelerar la masa líquida, es decir, F = m a



Consideramos y la diferencia entre extremos del líquido, cuando este se encuentra acelerado

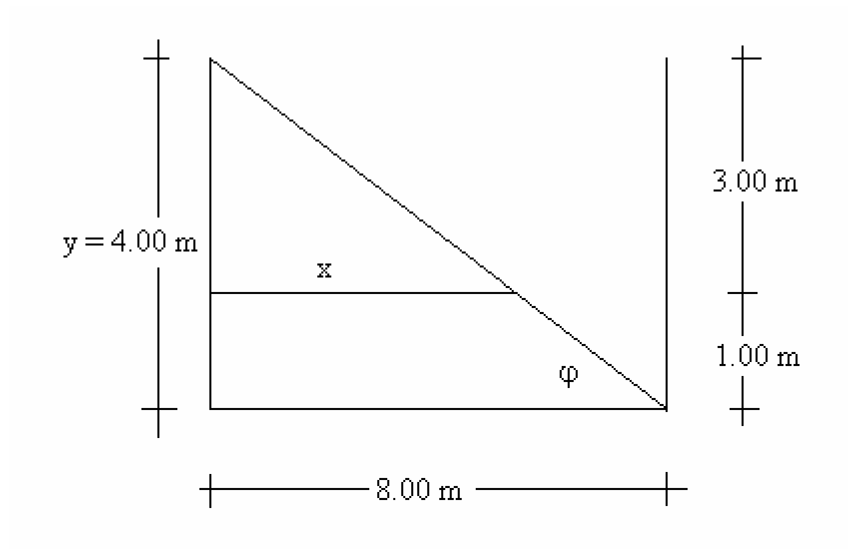
La pendiente de la superficie del agua, según la ecuación de aceleración es,

$$\text{tg } \varphi = \frac{a_x}{g} = \frac{\left(\frac{g}{2}\right)}{g} = 0.50$$

por lo tanto,

$$\frac{y}{8} = 0.50 \quad \Rightarrow \quad y = 4.00 \text{ m}$$

como la altura del depósito es de 3.00 m y el desnivel de la superficie del agua es y = 4.00 m. el recipiente no es capaz de contener el agua y esta se derrama, quedando la superficie del agua según lo indicado en la siguiente figura.



donde,

$$\frac{3}{x} = \frac{4}{8} \qquad \Rightarrow \qquad x = 6.00 \text{ m}$$

por lo tanto,

$$V_{inicial} = 1.50 \times 8.00 \times 2.00 \qquad = 24.00 \text{ m}^3$$

$$V_{final} = \frac{1}{2} \times 6.00 \times 3.00 \times 2.00 \qquad = 18.00 \text{ m}^3$$

$$V_{derramado} \qquad = 6.00 \text{ m}^3$$

Determinación de las fuerzas en los extremos del depósito
La fuerza en la pared anterior es cero ya que no existe líquido sobre ella
La fuerza en la pared posterior es

$$F_h = \frac{1}{2} \gamma H^2 L$$

$$F_h = \frac{1}{2} \times 1000 \times 3.00^2 \times 2.00 = 9000 \text{ kg}$$

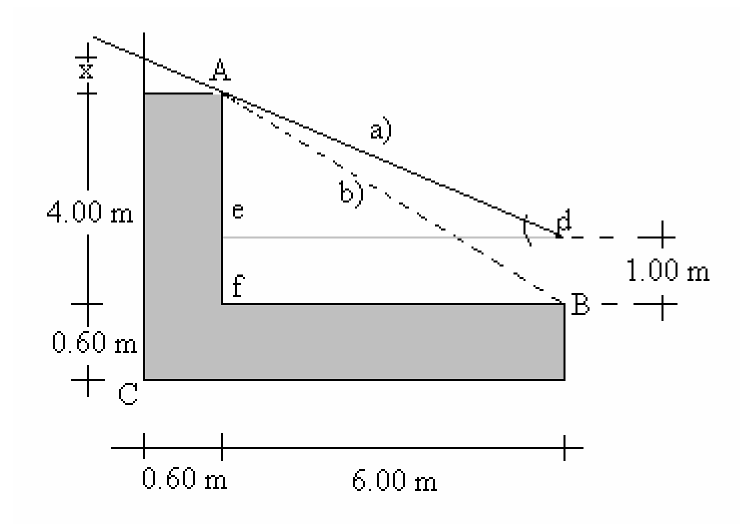
Determinación de la fuerza no equilibrada

$$F = M a$$

La masa final es igual al volumen por la densidad, entonces la fuerza se puede calcular como

$$F = \left(18 \frac{1000}{9.81}\right)\left(\frac{9.81}{2}\right) = 9000 \text{ kg}$$, igual al resultado obtenido anteriormente

Problema 2.59
El depósito de la figura tiene un pequeño orificio en el punto A; si se llena de aceite de densidad relativa, S = 0.90, determinar:
a) La presión en los puntos B y C, si $a_x = 4.90$ m/s^2
b) La aceleración, a_x, para que la presión en B sea cero.



a) Si la aceleración es 4.90 m/s ^{2}, la pendiente de la superficie imaginaria del aceite es

$$\text{tg } \varphi = \frac{a_x}{g} = \frac{4.90}{9.81} = 0.50$$

como la presión es $p = \gamma h$, al sustituir se tiene
$p_B = 1.00 \,(0.90 \times 1000) = 900 \text{ kg/m}^2$

$p_C = (4.00 + 0.60 + x)\,\gamma$, el valor de x obtenido por relación del triángulo vale 0.30 m

$p_C = (4.00 + 0.60 + 0.30)\ (0.90 \times 1000)$

$p_C = 4410 \text{ kg/m}^2$

b) Si se quiere que la presión sea cero en el punto B, la superficie imaginaria deberá pasar por dicho punto y la pendiente será

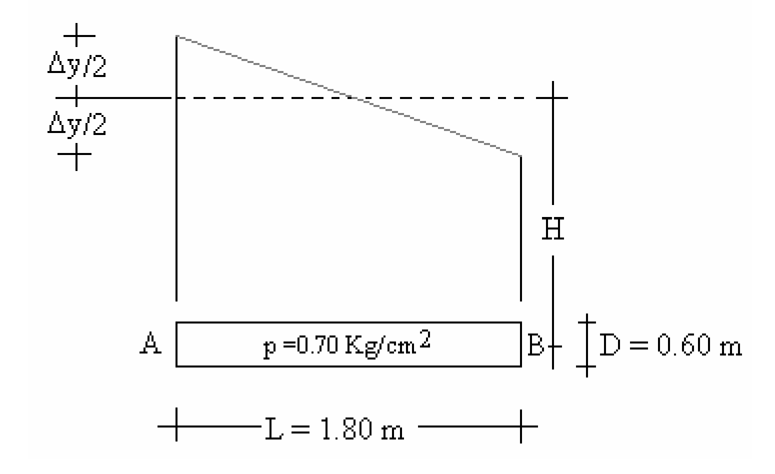
$$\text{tg } \varphi = \frac{4}{6} = \frac{a_x}{g} \qquad \Rightarrow \qquad a_x = \frac{4}{6} \times 9.81 = 6.54 \text{ m/s}^2$$

Problema 2.60
Un recipiente cilíndrico de 60 cm de diámetro y 180 cm de longitud, se encuentra en posición horizontal y lleno de un liquido de densidad 81.55 UTM/m^3, existiendo una presión de 0.7 kg/cm^2 a lo largo del eje antes de iniciarse el movimiento.
Si es sometido una aceleración uniforme, a_x, de g/2. determinar la fuerza ejercida en cada uno de los extremos y comprobar que la diferencia entre estas fuerzas es igual a la fuerza necesaria para acelerar la masa líquida.

$p = 0.70$ Kg/cm^2 $D = 0.60$ m F

$L = 1.80$ m

Determinación de la altura respecto al eje, de la superficie imaginaria donde la presión es cero



$$H = \frac{p}{\gamma} = \frac{p}{\rho\, g} = \frac{0.7 \times 10^4}{81.55 \times 9.81} = 8.75 \text{ m}$$

Determinación de la pendiente de la superficie imaginaria

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{a_x}{g} = \frac{\left(\frac{g}{2}\right)}{g} = 0.50$$

el desnivel de esta superficie entre la cara anterior y la posterior es

$$\frac{\Delta y}{1.80} = 0.50 \quad \Rightarrow \quad \Delta y = 0.90 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta y}{2} = 0.45 \text{ m}$$

Determinación de la fuerza producida en la cara posterior

$$F_A = p_A\, A = \gamma\, h_A\, A = \rho\, g\, h_A\, A = (81.55 \times 9.81)\,(8.75 + 0.45)\,\frac{\pi}{4}\, 0.60^2 \quad = 2081 \text{ kg}$$

$$F_B = p_B\, A = \gamma\, h_B\, A = \rho\, g\, h_B\, A = (81.55 \times 9.81)\,(8.75 - 0.45)\,\frac{\pi}{4}\, 0.60^2 \quad = 1877 \text{ kg}$$

La diferencia de las fuerzas entre ambas caras es $F = F_A - F_B$ $F = 204$ kg

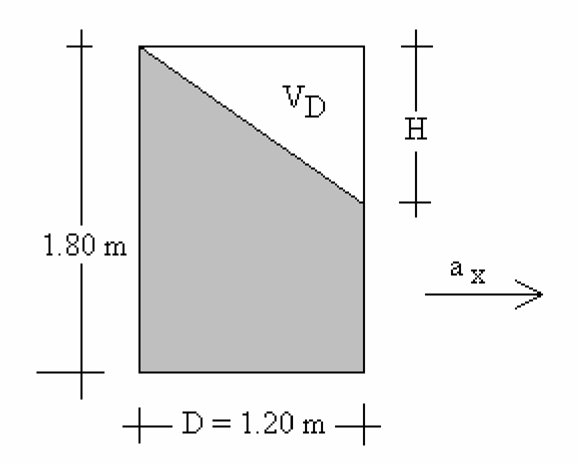
Determinación de la fuerza no equilibrada

$F = m\ a$

La masa es igual al volumen por la densidad, entonces la fuerza se puede calcular como

$$F = \frac{\pi}{4} \times 0.60^2 \times 1.80 \times 81.55 \times \left(\frac{9.81}{2}\right) = 204 \text{ kg}$$

Problema 2.61
Un depósito de sección recta circular de 1.80 m de alto y 1.20 m de diámetro se llena con agua y se acelera uniformemente en la dirección horizontal. Determinar la fuerza necesaria para que se derrame un tercio del agua.



Vamos a resolver el problema de dos forma; la primera es

Determinación del volumen derramado, V_D

$$V_D = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} 1.20^2 \text{ x } 1.80\right) = 0.678 \text{ m}^3$$

La altura H puede calcularse considerando que

$$2\, V_D = \frac{\pi}{4}\ 1.20^2\, H$$

de donde, al despejar se obtiene

$$H = \frac{2 \text{ x } 0.678}{\frac{\pi}{4} \text{ x } 1.20^2} = 1.20 \text{ m}$$

Por lo tanto la pendiente de la superficie es

$$\text{tg}\, \varphi = \frac{1.20}{1.20} = 1 = \frac{a_x}{g} \qquad \Rightarrow \qquad a_x = 9.81 \text{ m/s}^2$$

$F = m\ a$

$F = (102 \text{ x } 2 \text{ x } 0.678)\ 9.81$

$F = 1358 \text{ kg}$

Segunda forma para resolver el problema es

Determinación del volumen total

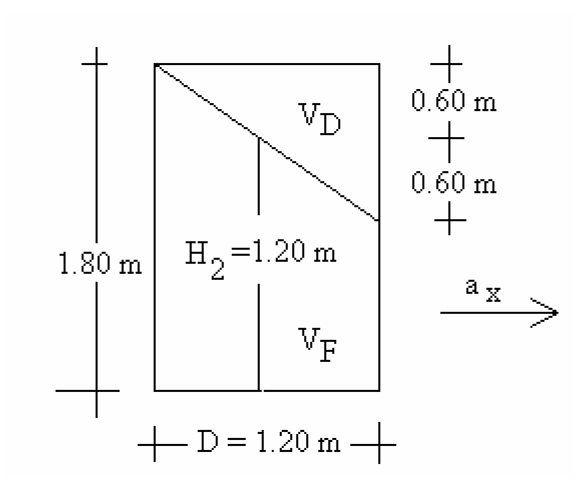
$$V_T = \frac{\pi}{4} \text{ x } 1.20^2 \text{ x } 1.80 = 2.035 \text{ m}^3$$

Determinación del volumen derramado

$$V_D = \frac{1}{3} \text{ x } 2.035 = 0.678 \text{ m}^3$$

Entonces el volumen final es

$$V_F = 1.357 \text{ m}^3$$



La altura media, H_2, en el eje del cilindro, es según la ecuación del volumen final

$$1.357 = \frac{\pi}{4} \text{ x } 1.20^2 \text{ x } H_2 \quad \Rightarrow \quad H_2 = \frac{1.357 \text{ x } 4}{1.20^2 \text{ x } \pi} = 1.20 \text{ m}$$

siendo la pendiente de la superficie del líquido

$$\text{tg } \varphi = \frac{1.20}{1.20} = 1$$

como

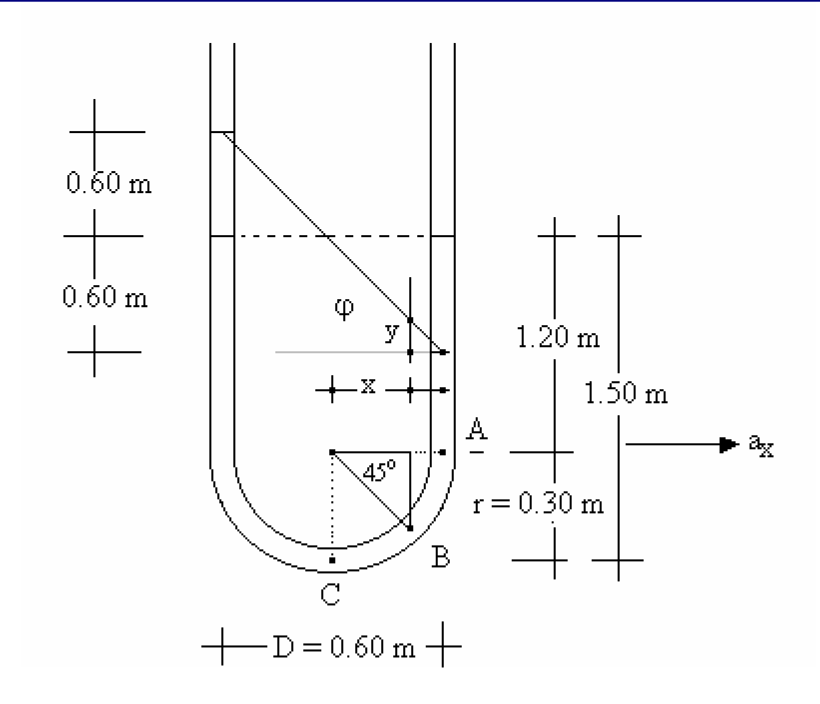
$$\text{tg } \varphi = \frac{a_x}{g} \quad \Rightarrow \quad a_x = 9.81 \text{ m /s}^2$$

Entonces la fuerza necesaria es

$$F = m \ a = (1.357 \text{ x } 102) \ 9.81$$

$$F = 1358 \text{ kg}$$

Problema 2.62
El tubo en U, mostrado en la figura, contiene agua hasta una altura de 1.50 m cuando está en reposo. Qué aceleración, a_x, se debe aplicar para que la presión en A sea de 600 kg /m^2. En esta condición cuál es la presión en los puntos B y C, en kg/cm ^{2}.
Suponer que las ramas son suficientemente largas como para que el agua no se derrame.



Determinación de la aceleración a_x
Como se quiere que la presión en el punto A sea de 600 kg/cm^2, la altura del agua en ese punto debe ser 0.60 m; en consecuencia, el agua en la otra rama debe subir 0.60 m, existiendo un desnivel de 1.20 m. Así, la pendiente de la superficie imaginaria se puede calcular como

$$\text{tg}\ \varphi = \frac{1.20}{0.60} = 2$$

Para que ocurra esto, la aceleración correspondiente debe ser

$$\text{tg}\ \varphi = 2 = \frac{a_x}{g} \qquad \Rightarrow \qquad a_x = 2\ g = 2 \times 9.81 = 19.62\ \text{m/s}^2$$

Determinación de la presión en el punto B.

Esta es igual al peso específico del líquido multiplicado por la altura, desde el punto B hasta la superficie imaginaria del líquido; es decir,

$p_B = \gamma\ h_B$

$h_B = 0.60 + y + x$

$x = 0.30 \cos 45° = 0.21$ m

$$\frac{y}{0.09} = 2 \qquad \Rightarrow y = 0.18 \text{ m}$$

$h_B = 0.60 + 0.18 + 0.21 = 0.99$ m

$p_B = 0.99 \times 1000 = 990 \text{ kg/m}^2$

$p_B = 990 \times 10^{-4} = 0.099 \text{ kg/cm}^2$

Determinación de la presión en el punto C.

Esta es igual al peso específico del líquido multiplicado por la altura, desde el punto C hasta la superficie imaginaria del líquido; es decir,
$p_C = \gamma \, h_C$

$Pc = 1.50 \times 1000 = 1500 \text{ kg/m}^2$

$Pc = 1500 \times 10^{-4} = 0.15 \text{ kg/cm}^2$

Problema 2.63
Una fuerza vertical no equilibrada y dirigida hacia arriba, de módulo 30 kg, acelera un volumen de 45 litros de agua.
Si el agua ocupa una profundidad de 90 cm en un depósito cilíndrico, cuál es la fuerza que actúa sobre el fondo del depósito.

La determinación del diámetro D, del cilindro se puede obtener a partir del volumen V, el cual es igual al área de la base multiplicada por la altura; así,
$V = A \; h$

Al sustituir los valores numéricos resulta

$$45 \times 10^{-3} = \frac{\pi}{4} D^2 \times 0.90 \quad \Rightarrow \quad D = \sqrt{\frac{0.045 \times 4}{0.90 \times \pi}} = 0.252 \text{ m}$$

Determinación de la aceleración a_y

$F = m \; a_y = V \rho \, a_y$

Al sustituir los valores numéricos resulta

$$30 = 45 \times 10^{-3} \times 102 \; a_y \quad \Rightarrow \quad a_y = \frac{30}{0.045 \times 102} = 6.54 \text{ m/s}^2$$

$$p = \gamma \; h \left(1 + \frac{a_y}{g}\right)$$

Al sustituir los valores numéricos resulta

$$p = 1000 \times 0.90 \left(1 + \frac{6.54}{9.81}\right) = 1500 \text{ kg/m}^2$$

por lo tanto la fuerza que actúa en el fondo del depósito es

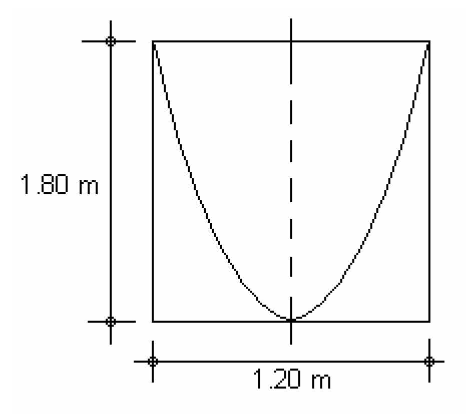
$F = p \, A$

Al sustituir los valores numéricos resulta

$$F = 1500 \; \frac{\pi}{4} \; 0.252^{\,2}$$

$F = 74.91 \text{ kg}$

Problema 2.64
A qué velocidad debe girar un depósito cilíndrico, de 1.20 m de diámetro y 1.80 m de altura, lleno de agua, para que la profundidad en el centro sea nula.



La ecuación de la superficie parabólica es

$$h = \frac{p}{\gamma} = \frac{\omega^2\ r^2}{2\,g}$$

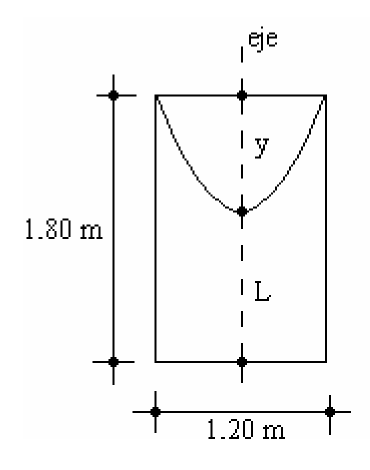
Esta se debe satisfacer para el punto de coordenadas (0.60; 1.80); es decir,

$$1.80 = \frac{\omega^2\ 0.60^2}{2\,g}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{19.62 \times 1.80}{0.60^2}}$$

$$\omega = 9.90 \text{ rad/s}$$

Problema 2.65
Un depósito abierto cilíndrico de 120 cm de diámetro y 180 cm de profundidad, se llena de agua y se le hace girar a 60 rpm. Determinar qué volumen de líquido se derrama y cuál es la profundidad en el eje.



La velocidad angular, n = 60 rpm, expresada en rad/s es

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\ \pi\ 60}{60} = 6.28 \text{ rad/s}$$

La ecuación de la superficie parabólica es

$$h = \frac{p}{\gamma} = \frac{\omega^2\ r^2}{2g}$$

con la cual se puede calcular la altura "y"; así,

$$y = \frac{6.28^2 \times 0.60^2}{2 \times 9.81} = 0.72\,m$$

La profundidad en el eje del cilindro es

L = 1.80 – 0.72 = 1.08 m

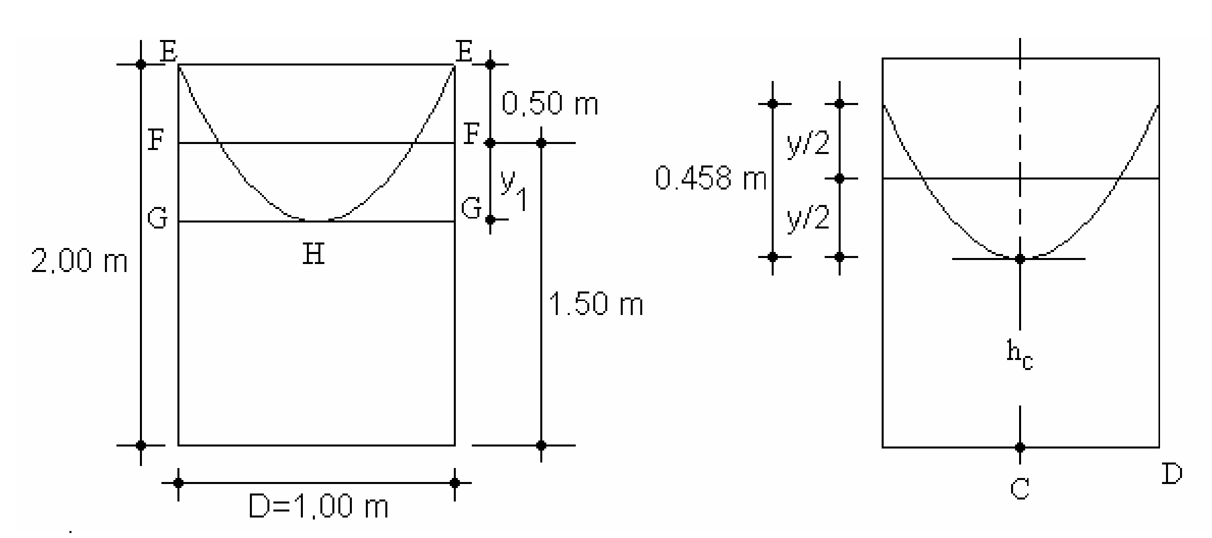
El volumen del paraboloide, equivalente al volumen derramado, es igual a la mitad del volumen del cilindro circunscrito; es decir,

$$V = \frac{1}{2}\pi\ 0.60^2 \times\ 0.72 = 0.410\,m^3$$

Problema 2.66

Un depósito cilíndrico de 2.00 m de altura y 1.00 m de diámetro contiene 1.50 m de agua. Si el cilindro gira alrededor de su eje geométrico, determinar:

a) La velocidad angular que puede alcanzar sin que se derrame el agua.
b) La presión en el fondo del depósito en los puntos C y D cuando ω = 6 rad/s.



Si el líquido no se derrama, el volumen de aire del cilindro, EEFF, antes de iniciar la rotación, debe ser igual al volumen de aire del paraboloide de revolución EEH cuando se encuentra en rotación; es decir,

$V_{EEFF} = V_{EEH}$

El volumen de aire en el cilindro, antes de rotación es

$$V_{EEFF} = \frac{\pi}{4}\ 1.00^2 \text{ x } 0.50$$

El volumen de aire en el paraboloide, durante la rotación es

$$V_{EEH} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{4}1.00^2\ (0.50 + y_1)$$

Igualando ambas expresiones se obtiene

$$\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}1.00^2\ (0.50 + y_1) = \frac{\pi}{4}\ 1.00^2 \text{ x } 0.50$$

de donde,

$y_1 = 0.50$ m.

Para generalizar, el punto de la superficie libre en el eje de rotación desciende una altura igual a la elevación que experimentan los puntos del líquido en contacto con las paredes del recipiente

La ecuación de la superficie parabólica es

$$h = \frac{p}{\gamma} = \frac{\omega^2\ r^2}{2g}$$

Esta se debe satisfacer para el punto de coordenadas (0.50; 1.00); es decir,

$$1.00 = \frac{\omega^2\ 0.50^2}{2g}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{19.62 \text{ x } 1.00}{0.50^2}}$$

$\omega = 8.86$ rad /s

Si el cilindro gira a 6.00 rad /s, entonces la altura en la parte exterior del cilindro es

$$y = \frac{6.00^2 \text{ x } 0.50^2}{2 \text{ x } 9.81} = 0.458\,\text{m}$$

La presión en el punto C es

$p_c = \gamma\ h_c$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$p_c = 1000\left(1.50 - \frac{0.458}{2}\right) = 1271 \text{ kg/m}^2$$

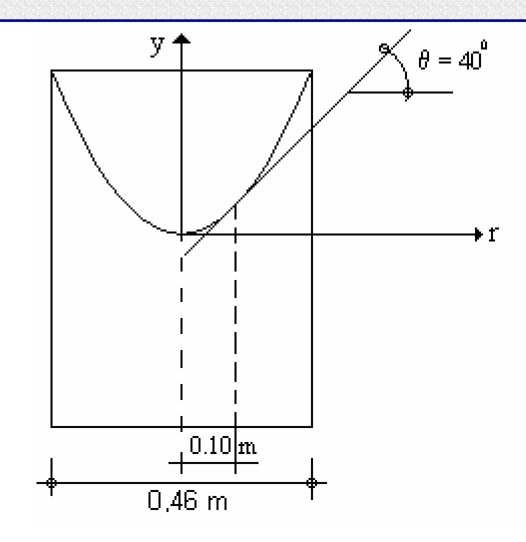
La presión en el punto D es

$p_D = \gamma\ h_D$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$p_D = 1000\left(1.50 + \frac{0.458}{2}\right) = 1729 \text{ kg /m}^2$$

Problema 2.67
Un recipiente abierto de 46 cm de diámetro y lleno de agua está girando alrededor de su eje vertical a tal velocidad que la superficie del agua a 10 cm del eje forma un ángulo de 40º con la horizontal. Calcular la velocidad de rotación, ω.



La ecuación de la superficie parabólica es

$$y = \frac{p}{\gamma} = \frac{\omega^2 \, r^2}{2g}$$

La pendiente de la superficie parabólica se puede determinar, en cualquier punto como la derivada de la función; es decir,

$$\frac{dy}{dr} = \frac{\omega^2}{g} r$$

como se conoce que la pendiente de la tangente a la curva, en un punto situado a 0.10 m del eje, forma un ángulo de 40^0 con la horizontal, podemos decir que

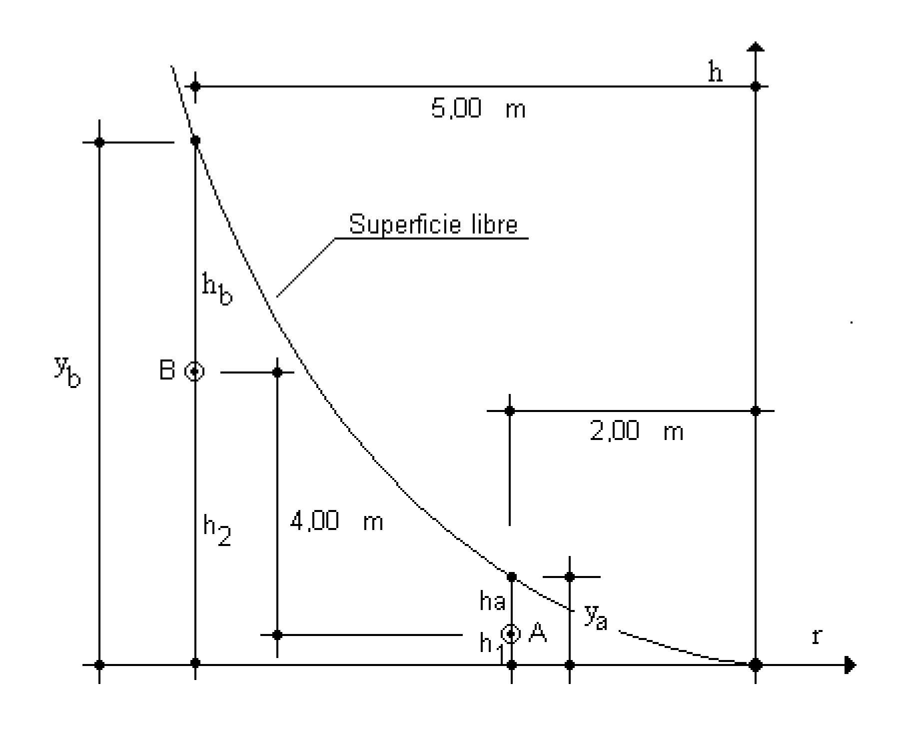
$$\text{tg}\,\theta = \frac{\omega^2}{g}\,\text{r}$$

Al sustituir los valores numéricos y despejar resulta

$$\omega = \sqrt{\frac{9.81 \ \text{tg } 40^\circ}{0.10}}$$

ω = 9.07 rad/s

Problema 2.68
Un líquido de peso específico relativo 1.20 gira a 200 rpm alrededor de un eje vertical. En un punto A del fluido a 2.00 m del eje, la presión es 10 kg/cm^2. Determinar la presión en un punto B, 4.00 m más alto que A y a 5.00 m del eje.
Haga un gráfico explicativo.



Velocidad angular, n = 200 rpm, expresada en rad/s

$$\omega = \frac{2\,\pi\,n}{60} = \frac{2\ \pi\ 200}{60} = 29.94 \text{ rad/s}$$

La ecuación de la superficie del líquido es

$$h = \frac{p}{\gamma} = \frac{\omega^2\ r^2}{2\,g}$$

Altura y_a, situada a 2.00 m del eje, por encima del vértice de la parábola es

$$y_a = \frac{20.94^2 \text{ x } 2.00^2}{19.62} = 89.40\,\text{m}$$

Altura y_b, situada a 5.00 m del eje, por encima del vértice de la parábola es

$$y_b = \frac{20.94^2 \text{ x } 5.00^2}{19.62} = 558.72 \text{ m}$$

La altura de presión h_a , desde el punto A hasta la superficie libre del líquido es

$$h_a = \frac{p}{\gamma} = \frac{10 \text{ x } 10^4}{1.20 \text{ x } 1000} = 83.33 \text{ m}$$

La distancia h_1 indicada en el gráfico es

$h_1 = y_a - h_a = 89.40 - 83.33 = 6.07$ m

La distancia h_2 indicada en el gráfico es

$h_2 = h_1 + 4.00 = 6.07 + 4.00 = 10.07$ m

La distancia h_B indicada en el gráfico es

$h_B = y_b - h_2 = 558.72 - 10.07 = 548.72$ m

entonces la presión en el punto B es

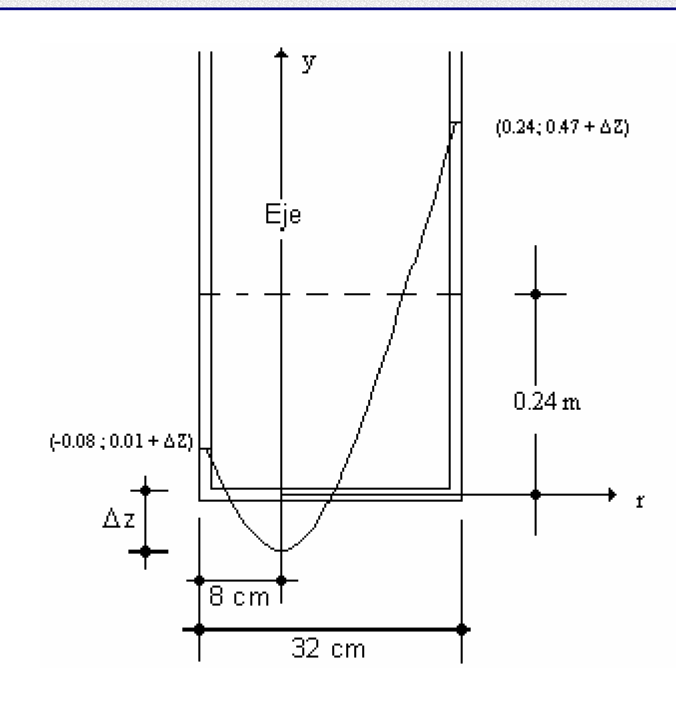
$p_B = \gamma\ h_B = 548.72 \text{ x } 1200 = 658380$ kg/m^2; es decir,

equivalente a

$p_B = 658380 \text{ x } 10^{-4} = 65.84$ kg/cm^2

Problema 2.69

El tubo que se muestra en la figura contiene mercurio que asciende 24 cm en cada rama cuando está en reposo. Determinar a que velocidad debe girar alrededor del eje vertical, mostrado, para que en la rama más próxima el eje quede con un centímetro de mercurio. Suponer que las ramas son suficientemente altas para que el líquido no se derrame.



La ecuación de la superficie imaginaria es

$$y = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

Esta se debe satisfacer para el punto de coordenadas (0.24 ; 0.47 + Δz); es decir,

$$0.47 + \Delta z = \frac{\omega^2\ 0.24^2}{19.62}$$

y también para el punto de coordenadas (– 0.08 ; 0.01 + Δz); o sea,

$$0.01 + \Delta z = \frac{\omega^2 (-0.08)^2}{19.62}$$

restando las dos expresiones anteriores tendremos

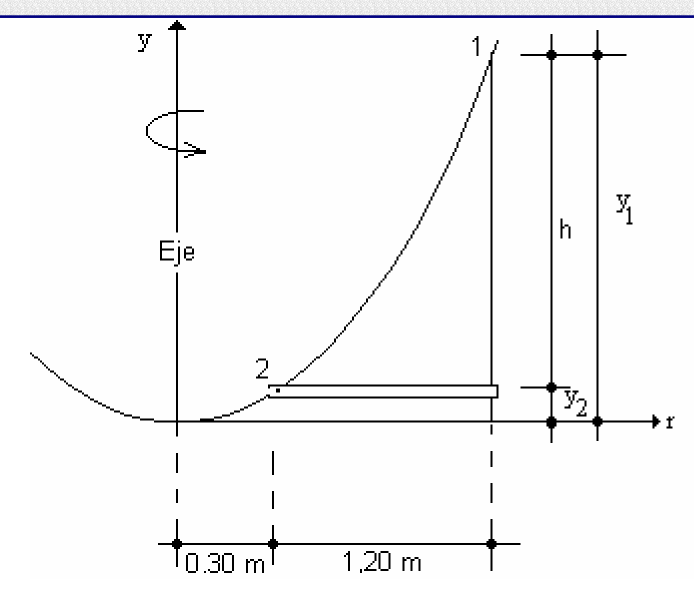
$$0.46 = \frac{\omega^2\ 0.24^2}{19.62} - \frac{\omega^2 (-0.08)^2}{19.62}$$

de donde, al despejar

ω = 13.27 rad/s

Problema 2.70

Un tubo de 7.5 cm de diámetro y 1.20 m de longitud se llena con un aceite de densidad relativa 0.822 y a continuación se cierran sus dos extremos. Puesto en posición horizontal, se le hace girar a 27.5 rad/s alrededor de un eje vertical que dista 30 cm de uno de sus extremos. Determinar la presión que se desarrollará en el extremo del tubo más alejado del eje, medida en kg/cm^2, si en el extremo 2 se encuentra un pequeño orificio.



Por estar en contacto con la atmósfera, la presión en el punto 2 es cero; por lo tanto, la superficie libre imaginaria del líquido pasa por dicho punto, según se indica en la figura anterior.

La ecuación de la superficie imaginaria es

$$y = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

La altura y_1, se puede determinar mediante la ecuación de la superficie imaginaria como

$$y_1 = \frac{27.5^2 \text{ x } 1.50^2}{2g} = 86.80 \text{ m}$$

La altura y_2, se puede determinar mediante la ecuación de la superficie imaginaria como

$$y_2 = \frac{27.5^2 \text{ x } 0.30^2}{2g} = 3.47 \text{ m}$$

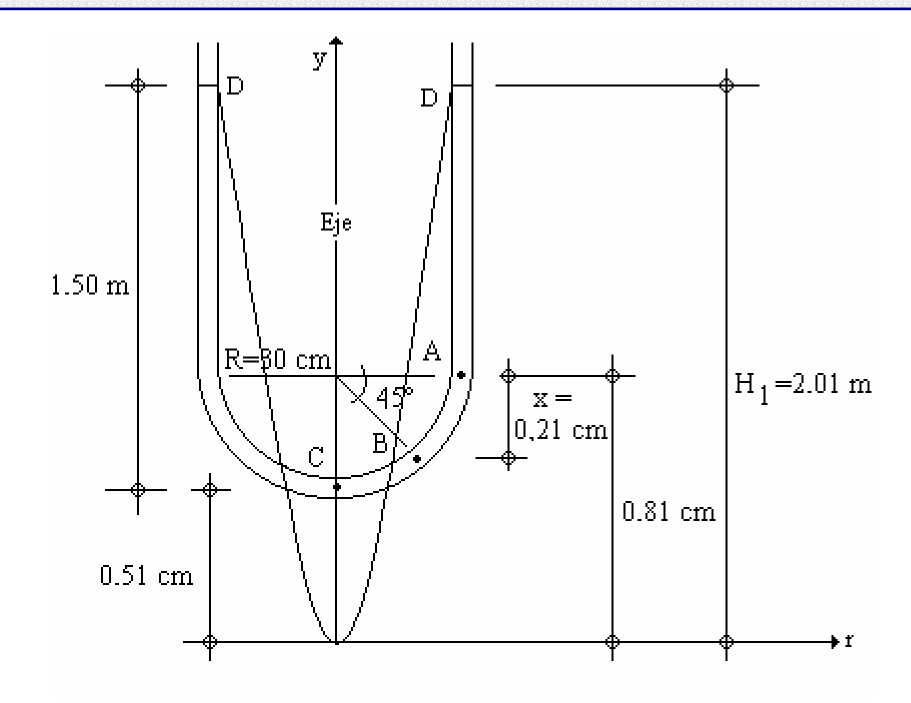
Siendo la presión igual al peso específico multiplicado por la diferencia de alturas; es decir,

$$p = \gamma\, h = 0.822 \text{ x } 1000\ (86.80 - 3.47) = 68497 \text{ kg/m}^2$$

lo que equivale a

$$p = 68497 \text{ x } 10^{-4} = 6.85 \text{ kg/cm}^2$$

Problema 2.71
El tubo en U mostrado en la figura contiene agua hasta una altura de 1.50 m en reposo. Si se hace rotar a 200 rpm alrededor de un eje vertical que pase por C, determinar cuál es la presión en los puntos A, B, y C.



La velocidad angular n = 200 rpm, se puede expresar en rad/s como

$$\omega = \frac{2\,\pi\,n}{60}$$

Al sustituir los valores resulta

$$\omega = \frac{2\ \pi\ 200}{60} = 20.93\ \text{rad/s}$$

La distancia H_1, desde el vértice, V, de la superficie imaginaria, hasta el punto D es

$$H_1 = \frac{\omega^2\ r^2}{2\,g} = \frac{20.93^2\ x\ 0.30^2}{19.62} = 2.01\,m$$

Determinación de la presión en el punto C

$p_C = \gamma\ h_C$

La distancia desde el vértice, hasta el punto C es

$h_C = 2.01 - 1.50 = 0.51$ m

entonces la presión en C es

$p_C = \gamma\ h_C = -\ 0.51\ x\ 1000 = -\ 510\ kg/m^2$

Determinación de la presión en el punto A

$p_A = \gamma\ h_A = (1.50 - 0.30)\ 1000 = 1200\ kg/m^2$.

Determinación de la presión en el punto B

La distancia H_2, desde el vértice, V, hasta la superficie imaginaria que pasa por B, es

$$H_2 = \frac{\omega^2 r^2}{2\,g} = \frac{20.93^2\ x\ 0.21^2}{19.62} = 0.98\,m$$

x = 0.30 cos 45º = 0.21 m

$h_B = 0.98 - (0.81 - 0.21) = 0.38$ m

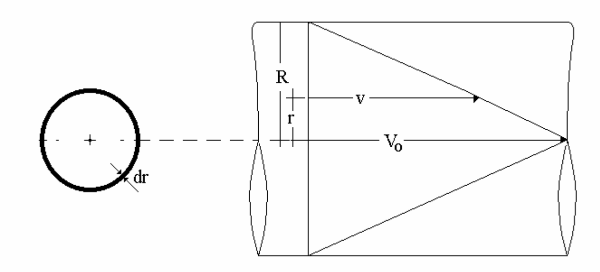
entonces la presión en B es

$P_B = \gamma\ h_B = 0.38\ x\ 1000 = 380\ kg/m^2$

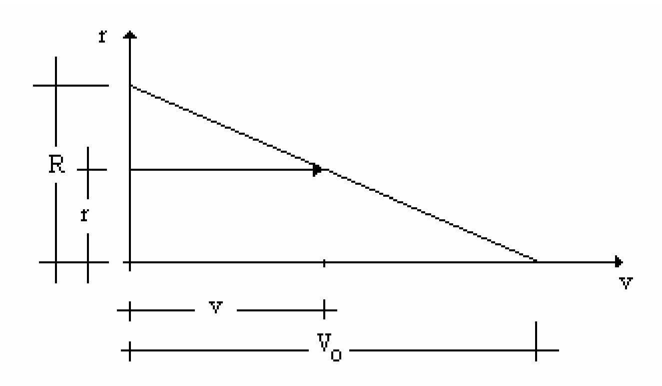
Capítulo 3

MOVIMIENTO DE LOS FLUIDOS

Problema 3.1
El fluido en un conducto de sección circular de radio R tiene la distribución de velocidades lineal, según se indicada en la figura. Determinar el caudal y la velocidad media.



Determinación de la ecuación de la velocidad



La ecuación general de la recta es $y - y_0 = m\,(x - x_0)$, para el presente caso, con los ejes v, r se tiene

$$r - r_o = m\,(v - v_o)$$

$$r - R = -\frac{R}{V_o}\,(v - 0)$$

Al despejar se obtiene la ecuación de la velocidad instantánea

$$v = \frac{V_0}{R}\,(R - r)$$

La expresión general del caudal es

$$Q = \int_A v \, da$$

Como el diferencial de área es $da = 2\,\pi\,r\,dr$ y la velocidad instantánea es $v = \frac{V_0}{R}(R - r)$ se obtiene al sustituir en la expresión anterior

$$Q = \int_0^R \frac{V_0}{R}(R - r)\,2\,\pi\,r\,dr$$

$$Q = 2\,\pi\frac{V_0}{R}\int_0^R (R - r)\,r\,dr$$

$$Q = 2\,\pi\frac{V_0}{R}\left[\frac{R\,r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right]_0^R$$

$$Q = 2\,\pi\frac{V_0}{R}\left[\frac{R\,R^2}{2} - \frac{R^3}{3}\right]$$

$$Q = \frac{V_0}{3}\,\pi\,R^2$$

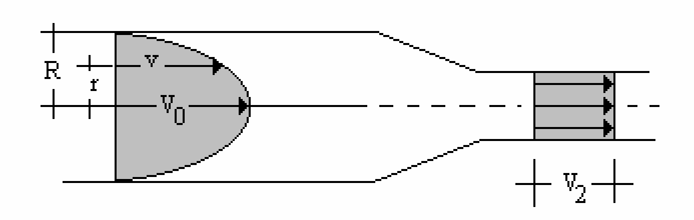
Determinación de la velocidad media

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{\left(\frac{V_0}{3}\,\pi\,R^2\right)}{\pi\,R^2}$$

$$V = \frac{V_0}{3}$$

Problema 3.2
Un líquido está fluyendo a través de una tubería de radio, R = 20 cm. La distribución de velocidades está dada por la expresión $v = V_0\,(1 - r^2/R^2)$. Determinar:

a) Una expresión para calcular el caudal en función de π, R, V_0.
b) La velocidad media en el tubo después que el radio R_2 se reduce a la mitad del radio inicial, considerando una velocidad $V_0 = 2.00$ m/s.



La expresión general del caudal es

$$Q = \int_A v\, da$$

Como el diferencial de área es $da = 2\pi r\, dr$ y la velocidad instantánea es $v = V_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$ se obtiene al sustituir en la expresión anterior

$$Q = \int_0^R V_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r\, dr$$

$$Q = 2\pi \frac{V_0}{R^2}\int_0^R \left(R^2 - r^2\right) r\, dr$$

$$Q = 2\pi \frac{V_0}{R^2}\left[\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R$$

$$Q = 2\pi \frac{V_0}{R}\left[\frac{R^2 R^2}{2} - \frac{R^4}{4}\right]$$

$$Q = \frac{V_0}{2}\pi R^2$$

Determinación de la velocidad en la sección reducida

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{\left(\frac{V_0}{2}\pi R^2\right)}{\pi {R_2}^2}$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$V_2 = \frac{\left(\frac{2.00}{2}\,\pi\,0.20^2\right)}{\pi\,0.10^2} = 4.00 \text{ m/s}$$

Problema 3.3
La distribución de velocidades para un flujo en una tubería puede expresarse por la fórmula $v = V_{máx}(1 - r/R)^{1/7}$
Determinar el caudal y la velocidad media para $V_{max} = 2.00$ m/s y D = 40 cm.

La expresión general del caudal es

$$Q = \int_A v\, da$$

Como el diferencial de área es $da = 2\,\pi\,r\,dr$ y la velocidad instantánea es $v = 2\left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/7}$ se obtiene al sustituir en la expresión anterior

$$Q = \int_0^R 2\left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/7} 2\,\pi\,r\,dr$$

Para realizar la integral se hace el cambio de variable

$$1 - \frac{r}{R} = u \qquad \Rightarrow \qquad r = R\,(1 - u) \qquad \Rightarrow \qquad dr = -R\,du$$

cambio de los límites de integración; para $r = 0$, $u = 1$ y para $r = R$, $u = 0$

$$Q = 4\pi \int_1^0 u^{1/7}\, R(1-u)(-R\,du) = -\int_1^0 \left(u^{1/7} - u^{8/7}\right) du$$

$$Q = -4\,\pi\,R^2 \left[\frac{7u^{8/7}}{8} - \frac{7u^{15/7}}{15}\right]_1^0 = 4\,\pi\,R^2\left[\frac{7}{8} - \frac{7}{15}\right]$$

$$Q = \frac{49}{30}\,\pi\,R^2$$

Para R = 0.20 m, se tiene,

$$Q = \frac{49}{30}\,\pi\, 0.20^2 = 0.205 \text{ m}^3/\text{s}$$

Determinación de la velocidad media

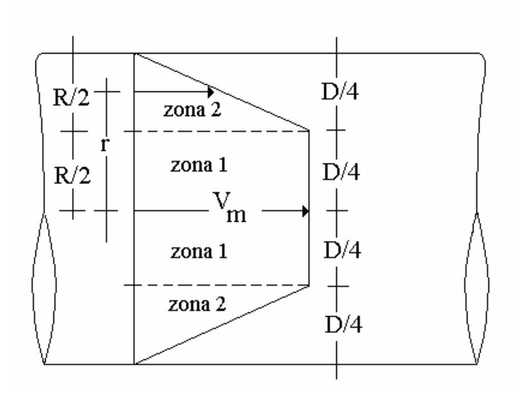
$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.205}{\frac{\pi}{4}\, 0.40^2} = 1.63 \text{ m/s}$$

Problema 3.4

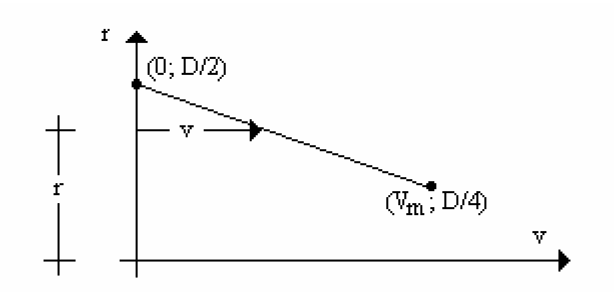
Para la distribución de velocidades que se muestra en el esquema. Determinar:

a) El caudal y la velocidad media en función de V_m y R

b) Si D = 0.40 m y V_m = 2.00 m/s, cuál es el caudal y la velocidad media



Determinación de la ecuación de la velocidad instantánea en la zona 2



La ecuación general de la recta es $y - y_0 = m\,(x - x_0)$, para el presente caso, con los ejes v, r se tiene

$$r - r_o = m\,(v - v_o)$$

$$r - \frac{D}{2} = -\frac{D}{4V_m}(\,v - 0)$$

Al despejar se obtiene la ecuación de la velocidad instantánea en la zona 2

$$v = \frac{2\,V_m}{R}(R - r)$$

La ecuación de la velocidad en la zona 1, es constante y es $v = V_m$

La expresión general del caudal es

$$Q = \int_A v\,da$$

Como el diferencial de área es $da = 2\,\pi\,r\,dr$ y las velocidades instantáneas son, en la zona 1 $v = V_m$ y en la zona 2, $v = \frac{2\,V_m}{R}(R - r)$, se obtiene al sustituir en la expresión anterior

$$Q = \int_0^{R/2} V_m\,2\,\pi\,r\,dr + \int_{R/2}^{R} \frac{2\,V_m}{R}(R - r)\,2\,\pi\,r\,dr$$

$$Q = V_m\,2\,\pi \int_0^{R/2} r\,dr + \frac{4\,V_m\,\pi}{R}\int_{R/2}^{R}(R - r)\,r\,dr$$

$$Q = V_m\,2\,\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{R/2} + \frac{4\,V_m\,\pi}{R}\left[\frac{R\,r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right]_{R/2}^{R}$$

$$Q = V_m\,2\,\pi \left[\frac{(R/2)^2}{2}\right] + \frac{4\,V_m\,\pi}{R}\left[\frac{R\,R^2}{2} - \frac{R^3}{3} - \frac{R\,(R/2)^2}{2} + \frac{(R/2)^3}{3}\right]$$

Al simplificar se obtiene

$$Q = \frac{7\,V_m}{12}\,\pi\,R^2$$

Determinación de la velocidad media

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{\left(\frac{7\,V_m}{12}\,\pi\,R^2\right)}{\pi\,R^2}$$

$$V = \frac{7}{12} V_m$$

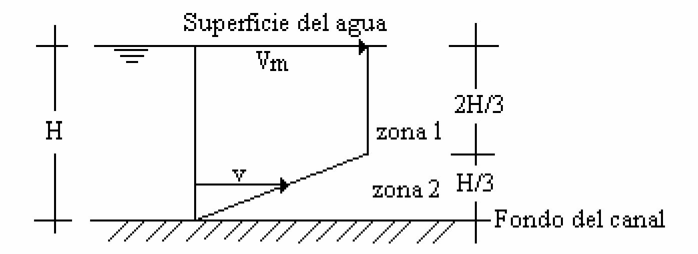
Al sustituir los valores numéricos obtenemos el caudal y la velocidad media

$$Q = \frac{7 \times 2.00}{12} \pi \, 0.20^2 = 0.147 \text{ m}^3\text{/s}$$

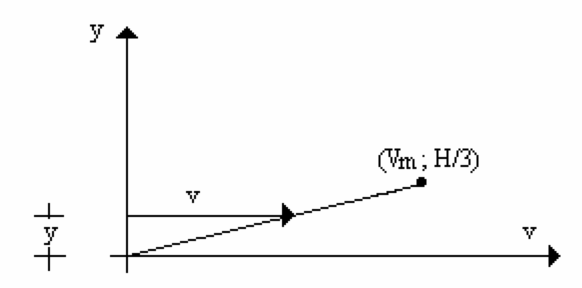
$$V = \frac{7}{12} 2.00 = 1.17 \text{ m/s}$$

Problema 3.5

Para la distribución de velocidades, en el canal de gran anchura que se indica en el esquema, calcular el caudal unitario, q y la velocidad media, V.



Determinación de la ecuación de la velocidad instantánea en la zona 2 es



La ecuación general de la recta es $y - y_0 = m (x - x_0)$, para el presente caso, con los ejes v, r se tiene

$$y - y_o = m (v - v_o)$$

$$y - 0 = \frac{\left(\frac{H}{3}\right)}{V_m} (v - 0)$$

Al despejar se obtiene la ecuación de la velocidad instantánea en la zona 2

$$v = \frac{3\,V_m}{H}\;y$$

La ecuación de la velocidad en la zona 1, es constante y es $v = V_m$

La expresión general del caudal es

$$Q = \int_A v\,d\,a$$

Como el diferencial de área es da = 1.00 dy y las velocidades instantáneas son, en la zona 1 $v = V_m$ y en la zona 2, $v = \frac{3\,V_m}{4}\;y$, se obtiene al sustituir en la expresión anterior

$$q = \int_0^{H/3} \frac{3\,V_m}{H}\;y\,d\,y + \int_{H/3}^{H} V_m\;d\,y$$

$$q = \frac{3\,V_m}{H}\int_0^{H/3} y\,d\,y \;+ V_m \int_{H/3}^{H} d\,y$$

$$q = \frac{3\,V_m}{H}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{H/3} + V_m\,[y]_{H/3}^{H}$$

$$q = \frac{3\,V_m}{H}\left[\frac{(H/3)^2}{2}\right] + V_m\left[H - \frac{H}{3}\right]$$

Al simplificar se obtiene

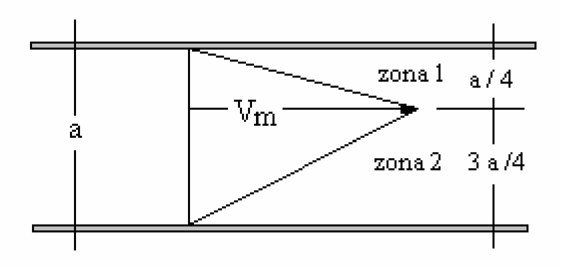
$$q = \frac{5\,V_m}{6}\;H$$

Determinación de la velocidad media

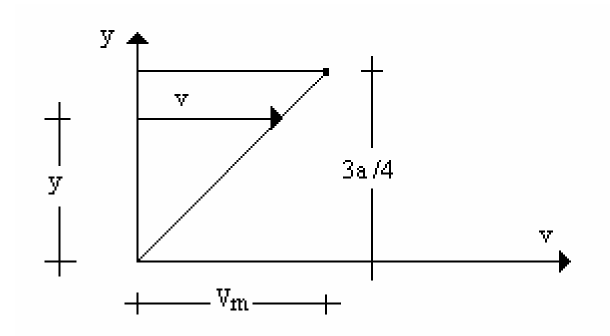
$$V = \frac{q}{A} = \frac{\left(\frac{5\ V_m}{6}\ H\right)}{1.00\ \ H}$$

$$V = \frac{5}{6}\ V_m$$

Problema 3.6
Para la distribución de velocidades indicadas en la figura, determinar el caudal y la velocidad media para flujo entre dos placas paralelas de ancho B, si estas se encuentran separadas una distancia a.



Determinación de la ecuación de la velocidad instantánea en la zona 2



La ecuación general de la recta es $y - y_0 = m\ (x - x_0)$, para el presente caso, con los ejes v, r se tiene

$$y - y_o = m\ (v - v_o)$$

$$y - 0 = \frac{\left(\frac{3}{4}a\right)}{V_m}(v - 0)$$

Al despejar se obtiene la ecuación de la velocidad instantánea en la zona 2

$$v = \frac{4\,V_m}{3\,a}\,y$$

Determinación del caudal en la zona 2

La expresión general del caudal es

$$Q = \int_A v\,da$$

Como el diferencial de área es da = B dy y las velocidad instantánea en la zona 2 es $v = \frac{4\,V_m}{3\,a}\,y$

se obtiene al sustituir en la expresión anterior

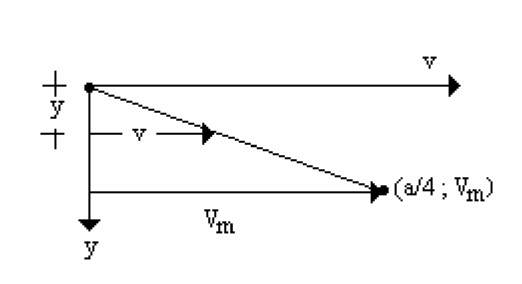
$$Q_2 = \int_0^{3a/4} \frac{4\,V_m}{3\,a}\,y\;B\,dy$$

$$Q_2 = \frac{4\,V_m}{3\,a}\,B\int_0^{3a/4} y\;dy$$

$$Q_2 = \frac{4\,V_m}{3\,a}\,B\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{3a/4}$$

$$Q_2 = \frac{4\,V_m}{3\,a}\,B\left[\frac{\left(\frac{3}{4}a\right)^2}{2}\right] = \frac{3V_m\;Ba}{8}$$

Determinación de la ecuación de la velocidad instantánea en la zona 1



La ecuación general de la recta es $y - y_0 = m\,(x - x_0)$, para el presente caso, con los ejes v, r se tiene

$$y - y_o = m\,(v - v_o)$$

$$y - 0 = \frac{\left(\frac{1}{4}a\right)}{V_m}\,(v - 0)$$

Al despejar se obtiene la ecuación de la velocidad instantánea en la zona 2

$$v = \frac{4\,V_m}{a}\,y$$

Determinación del caudal en la zona 1

La expresión general del caudal es

$$Q = \int_A v\,da$$

Como el diferencial de área es $da = B\,dy$ y la velocidad instantánea en la zona 1 es $v = \frac{4\,V_m}{a}\,y$ se obtiene al sustituir en la expresión anterior

$$Q_1 = \int_0^{a/4} \frac{4\,V_m}{a}\,y\;B\,dy$$

$$Q_1 = \frac{4\,V_m}{a}\,B \int_0^{a/4} y\;dy$$

$$Q_1 = \frac{4\,V_m}{a} B \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{a/4}$$

$$Q_1 = \frac{4\,V_m}{a} B \left[\frac{\left(\frac{a}{4}\right)^2}{2} \right] = \frac{V_m\ B\ a}{8}$$

El caudal total en las zonas 1 y 2 es

$$Q_T = Q_1 + Q_2 = \frac{V_m\ B\ a}{8} + \frac{3V_m\ Ba}{8}$$

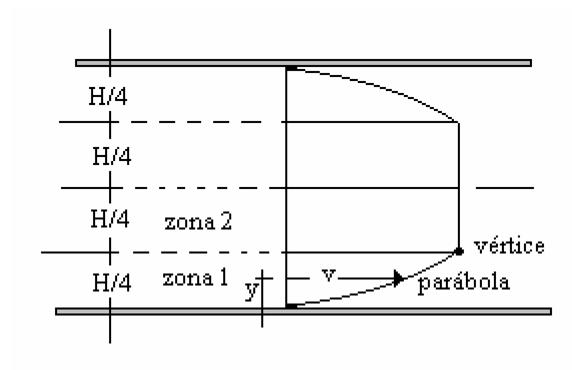
$$Q_T = \frac{1}{2}\ V_m\ B\ a$$

Determinación de la velocidad media

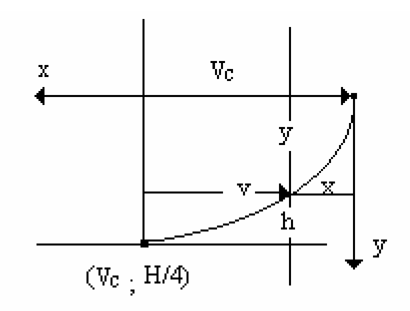
$$V = \frac{Q_T}{A} = \frac{\frac{1}{2} V_m\ B\ a}{B\ a}$$

$$V = \frac{1}{2} V_m$$

Problema 3.7
Calcular el caudal y la velocidad media para un flujo entre dos placas paralelas fijas, separadas a una distancia H, de 1.00 m de ancho, según la distribución de velocidades mostradas en la figura.



Determinación de la ecuación de la velocidades



La ecuación general de la parábola es $x = k\,y^2$, para el presente caso, se tiene

$$V_c = k\left(\frac{H}{4}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{16\,V_C}{H^2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{16\,V_C}{H^2}\,y^2$$

El cambio de variables es

$$x + v = V_C \quad \Rightarrow x = V_C - v$$

$$y + h = \frac{H}{4} \quad \Rightarrow y = \frac{H}{4} - h$$

$$V_c - v = \frac{16\,V_C}{H^2}\left(\frac{H}{4} - h\right)^2$$

$$v = V_c - \frac{16\,V_C}{H^2}\left(\frac{H}{4} - h\right)^2$$

Determinación del caudal en la zona 1

La expresión general del caudal es

$$Q = \int_A v\,d\,a$$

Como el diferencial de área es, $da = 1.00\,dy$, y la velocidad instantánea en la zona 1 es $v = V_c - \frac{16\,V_C}{H^2}\left(\frac{H}{4} - h\right)^2$

se obtiene al sustituir en la expresión anterior

$$Q_1 = \int_0^{H/4} \left(V_C - \frac{16\,V_C}{H^2} \left(\frac{H}{4} - h \right)^2 \right) dh \times 1.00$$

$$Q_1 = \int_0^{H/4} \left(V_C - \frac{16\,V_C}{H^2}\frac{H^2}{4^2} + \frac{16\,V_C}{H^2}\frac{2H}{4} h - \frac{16\,V_C}{H^2} h^2 \right) dh$$

$$Q_1 = \int_0^{H/4} \left(\frac{8\,V_C}{H} h - \frac{16\,V_C}{H^2} h^2 \right) dh$$

$$Q_1 = \left[\frac{8\,V_C}{H}\frac{h^2}{2} - \frac{16\,V_C}{H^2}\frac{h^3}{3} \right]_0^{H/4}$$

$$Q_1 = \left[\frac{8\,V_C}{H}\frac{\left(\frac{H}{4}\right)^2}{2} - \frac{16\,V_C}{H^2}\frac{\left(\frac{H}{4}\right)^3}{3} \right]$$

Simplificando se obtiene

$$Q_1 = \frac{1}{6}\,V_C\,H$$

Determinación del caudal en la zona 2

La expresión general del caudal es

$$Q = \int_A v\,da$$

Como el diferencial de área es $da = B\,dy$ y la velocidad instantánea en la zona 1 es $v = V_C$

$$Q_2 = \int_{H/4}^{H/2} V_C\,dh = \left[V_C\,h \right]_{H/4}^{H/2}$$

$$Q_2 = V_C\left[\frac{H}{2} - \frac{H}{4}\right] = \frac{1}{4} V_C H$$

El caudal en las zonas 1 y 2 es

$$Q_{1\text{-}2} = Q_1 + Q_2 = \frac{Vc\,H}{6} + \frac{Vc\,H}{4}$$

$$Q_{1\text{-}2} = \frac{5}{12} V_C H$$

El caudal total entre las dos placas es

$$Q_T = 2\left(\frac{5}{12}\right) V_C H = \frac{5}{6} V_C H$$

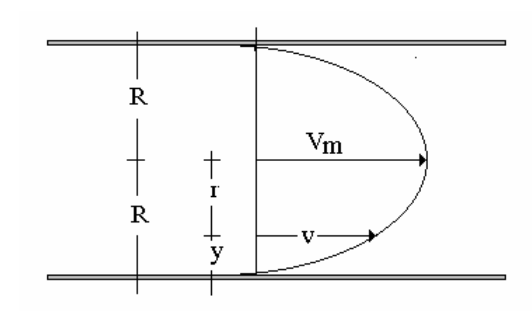
Determinación de la velocidad media

$$V = \frac{Q_T}{A} = \frac{\frac{5}{6} V_C H}{H}$$

$$V = \frac{5}{6} V_C$$

Problema 3.8
Si la velocidad puede expresarse como $v/V_m = (y/R)^{1/n}$, encuentre una expresión para, v/V_m , en función de n, para los siguientes casos:

a) Flujo bidimensional entre dos placas.
b) Flujo axial simétrico en una tubería.



Flujo bidimensional entre dos placas planas

La expresión general del caudal es

$$Q = \int_A v \, da$$

Como el diferencial de área es da = B dy y las velocidad instantánea es $v = V_m \, (y/R)^{1/n}$

$$Q = 2 \int_0^R V_m \left(\frac{y}{R} \right)^{1/n} B \, dy$$

$$Q = V \; (2 \, R \, B)$$

Igualando las expresiones anteriores se tiene

$$V \; (2 \, R \, B) = 2 \, V_m \frac{1}{R^{1/n}} \int_0^R (y)^{1/n} \, B \, dy$$

$$V \; R = \frac{V_m}{R^{1/n}} \left[\frac{y^{1+1/n}}{1+1/n} \right]_0^R$$

$$V \; R = \frac{V_m}{R^{1/n}} \frac{n}{n+1} R^{1+1/n}$$

$$V = V_m \frac{n}{n+1}$$

$$\frac{V}{V_m} = \frac{n}{n+1}$$

Flujo axial simétrico en una tubería

La expresión general del caudal es

$$Q = \int_A v \, da$$

Como el diferencial de área es da = $2\pi\ r\,d\,r$, $r = R - y$, la velocidad instantánea es $v = V_m\,(y/R)^{1/n}$

$$Q = \int_0^R 2\,\pi\,(R-y)\,V_m\left(\frac{y}{R}\right)^{1/n} d\,y$$

$$Q = V\,(\pi\,R^2)$$

Igualando las expresiones anteriores se tiene

$$V\,(\pi\,R^2) = 2\,\pi\,V_m\,\frac{1}{R^{1/n}}\int_0^R (R-y)\,(y)^{1/n}\ y$$

$$V\ R^2 = V_m\,\frac{1}{R^{1/n}}\left(R\int_0^R (y)^{1/n}\,d\,y + \int_0^R y^{1+1/n}\,d\,y\right)$$

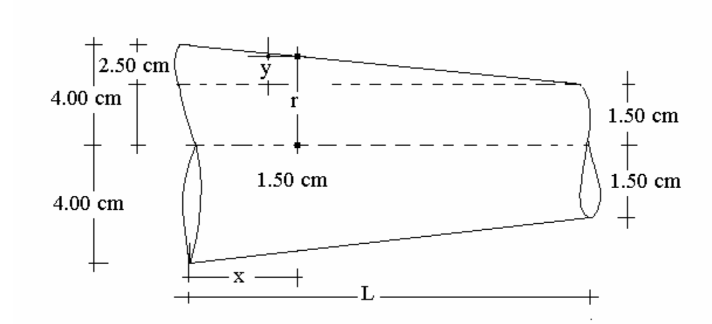
$$V\ R^2 = 2\ V_m\,\frac{1}{R^{1/n}}\left(R\left[\frac{y^{1+1/n}}{1+1/n}\right]_0^R - \left[\frac{y^{2+1/n}}{2+1/n}\right]_0^R\right)$$

$$V\ R^2 = 2\ V_m\,\frac{1}{R^{1/n}}\left(R\left[\frac{R^{1+1/n}}{1+1/n}\right] - \left[\frac{R^{2+1/n}}{2+1/n}\right]\right)$$

$$V = 2\,V_m\left(\left[\frac{n}{n+1}\right] - \left[\frac{n}{2\,n+1}\right]\right)$$

$$\frac{V}{V_m} = \left(\frac{2\,n}{n+1} - \frac{2\,n}{2\,n+1}\right)$$

Problema 3.9
La boquilla que se muestra en la figura, de 8 cm de diámetro en la base, 3 cm en el otro extremo y longitud L, descarga 1200 lts/min. Determinar la expresión para la variación de velocidad del fluido a lo largo del eje de la boquilla.
Medir la distancia x a lo largo del eje, a partir del plano de mayor diámetro.



La velocidad se puede determinar a partir de la ecuación de continuidad

$$Q = V_x\ A_x \qquad \Rightarrow \qquad V_x = \frac{Q}{A_x} \qquad \Rightarrow V_x = \frac{Q}{\pi\, r^2}$$

Determinación del radio a una distancia x

Por relación de triángulos se obtiene, en cm

$$\frac{4.00 - 1.50}{L} = \frac{y}{L - x} \qquad \Rightarrow \qquad y = 2.50\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$r = 1.50 + y$$

$$r = 1.50 + 2.50\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$r = 4.00 - 2.50\ \dfrac{x}{L}$, donde r es el radio a una distancia x en cm

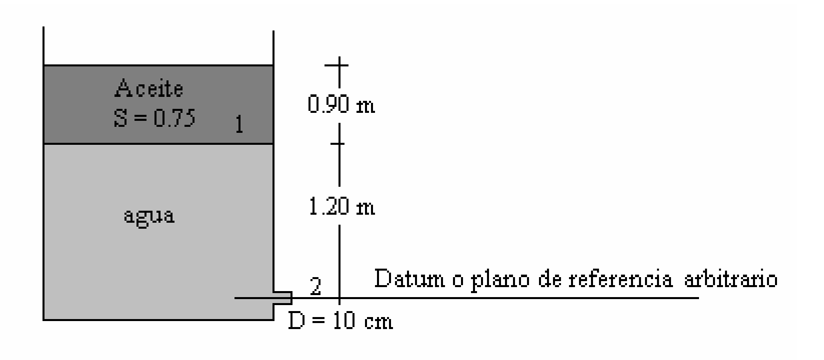
La velocidad expresada en m/s es

$$V = \frac{\left(\dfrac{1200 \text{ x } 10^{-3}}{60}\right)}{\pi\left[\left(4.00 - 2.50\ \dfrac{x}{L}\right) \text{x } 10^{-2}\right]^2}$$

Al simplificar se obtiene

$$V = \frac{200}{\pi\left[\left(4.00 - 2.50\ \frac{x}{L}\right)\right]^2}$$

Problema 3.10
Despreciando las pérdidas, determinar el caudal en el sistema mostrado en la figura, suponiendo que las alturas permanecen constantes (tanque de grandes dimensiones).



Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2 se obtiene

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

En el punto 1; la presión relativa es la producida por la capa de aceite que se encuentra sobre el agua y actúa como un émbolo; la velocidad se puede considerar cero por ser un tanque de grandes dimensiones y la altura respecto al plano de referencia es 1.20 m; así,

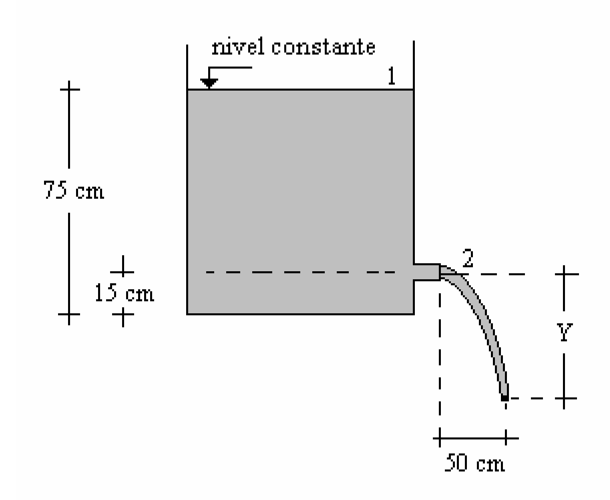
$$\frac{0.75 \times 1000 \times 0.90}{1000} + 0.00 + 1.20 = 0.00 + \frac{V_2^2}{2g} + 0.00$$

$$\frac{V_2^2}{2g} = 1.88$$

$$V_2 = \sqrt{19.62 \times 1.88} = 6.07 \text{ m/s}$$

$$Q = V_2 A_2 = \frac{\pi}{4}(0.10)^2 = 0.048 \text{ m}^3/\text{s} \quad \Rightarrow \quad Q = 48 \text{ lts/s}$$

Problema 3.11
El centro de un orificio está situado a 15 cm por encima del fondo de un recipiente que contiene agua hasta una profundidad de 75 cm. Despreciando las pérdidas determinar la depresión, Y, del chorro a una distancia horizontal de 50 cm desde el depósito.



Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2 se obtiene

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

$$0 + 0 + 0.60 = 0 + \frac{V_2^2}{2\,g} + 0$$

$$V_2 = \sqrt{2 \text{ x } 9.81 \text{ x } 0.60}$$

La trayectoria que describe el chorro de agua en su caída es parabólico, con ecuación

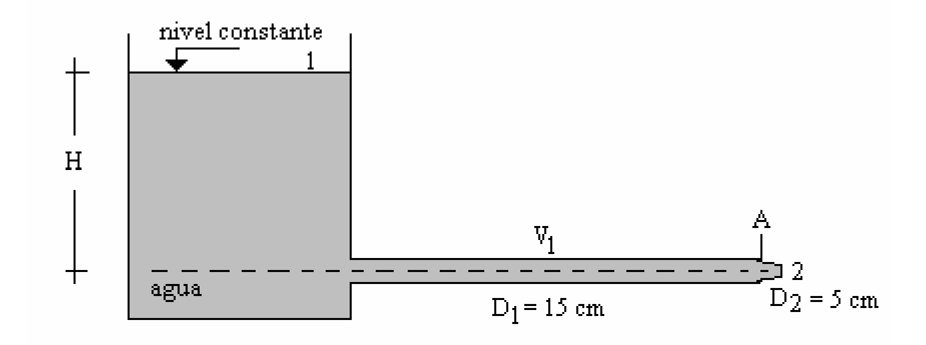
$$Y = \frac{g\,x^2}{2\,V_2^2} \qquad \Rightarrow \qquad V_2 = \sqrt{\frac{g\,x^2}{2\,Y}}$$

Al igualar las expresiones de la velocidad y sustituir los valores numéricos se obtiene

$$\sqrt{2 \text{ x } 9.81 \text{ x } 0.60} = \sqrt{\frac{9.81 \text{ x } 0.50^2}{2\,Y}}$$

$$Y = 0.10 \text{ m}$$

Problema 3.12
En la figura las pérdidas hasta la sección A son 4 $V_1^2/2g$ y las pérdidas en la reducción 0.05 $V_2^2/2g$. Si la presión en A es de 0.30 kg/cm^2. Determinar el caudal y la altura H.



Determinación del caudal

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos A y 2 se obtiene

$$\frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + 0.05\,\frac{V_2^2}{2g}$$

$$\frac{0.3 \times 10^4}{1000} + \frac{V_1^2}{2g} + 0.00 = 0.00 + \frac{V_2^2}{2g} + 0.00 + 0.05\,\frac{V_2^2}{2g}$$

Mediante de la ecuación de continuidad se obtiene

$$Q_1 = Q_2 \quad \Rightarrow \quad V_1\,A_1 = V_2\,A_2 \quad \Rightarrow \quad V_2 = V_1 \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2$$

y al sustituir los diámetros

$$V_2 = V_1 \left(\frac{15}{5}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad V_2 = 9\,V_2$$

sustituyendo la expresión de V_2 en la ecuación de Bernoulli se obtiene

$$\frac{0.3 \times 10^4}{1000} + \frac{V_1^2}{2g} + 0.00 = 0.00 + \frac{(9\,V_1)^2}{2g} + 0.00 + 0.05\,\frac{(9\,V_1)^2}{2g}$$

al simplificar y despejar

$$V_1 = \sqrt{\frac{3 \times 2 \times 9.81}{84.05}} = 0.84 \text{ m/s} \qquad \text{y} \qquad V_2 = 9\, V_1 = 9 \times 0.84 = 7.56 \text{ m/s}$$

El caudal es

$$Q = V_1\, A_1 \qquad \Rightarrow \qquad Q = V_1 \left(\frac{\pi}{4} D_1^{\,2}\right)$$

Sustituyendo los valores numéricos se obtiene

$$Q = 0.84 \left(\frac{\pi}{4} 0.15^{\,2}\right) = 0.015 \text{ m}^3\text{/s}$$

Determinación de la altura H

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2 se obtiene

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + 4\frac{V_1^2}{2g} + 0.05\frac{V_2^2}{2g}$$

$$0.00 + 0.00 + H = 0.00 + \frac{V_2^2}{2g} + 0.00 + 4\frac{V_1^2}{2g} + 0.05\frac{V_2^2}{2g}$$

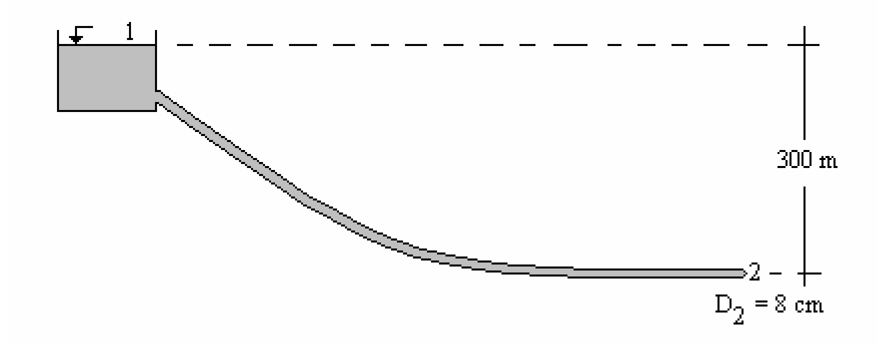
sustituyendo los valores de V_1 y V_2 se obtiene

$$0.00 + 0.00 + H = 0.00 + \frac{(7.56)^2}{2g} + 0.00 + 4\frac{(0.84)^2}{2g} + 0.05\frac{(7.56)^2}{2g}$$

al despejar y simplificar se obtiene

$$H = 3.20 \text{ m}$$

Problema 3.13
Despreciando las pérdidas por fricción, calcular el gasto y la potencia del fluido en la instalación que se muestra en la figura.



Determinación del caudal

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2 se obtiene

$$\frac{V_1^2}{2\,g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2\,g} + z_2$$

$$0.00 + 0.00 + z_1 = 0.00 + \frac{V_2^2}{2\,g} + 0.00$$

$$\frac{V_2^{\,2}}{2\,g} = z_1 \quad \Rightarrow \quad V_2 = \sqrt{2\,g\,z_1} = \sqrt{2 \times 9.81 \times 300} \quad \Rightarrow \quad V_2 = 76.6 \text{ m/s}$$

$$Q = V_2\,A_2 = 76.6\,\frac{\pi}{4}\,0.08^2 \quad \Rightarrow \quad Q = 0.385 \text{ m}^3\text{/s}$$

Determinación de la potencia

$$P = \frac{E}{t} = \frac{\frac{1}{2}\,m\,V^2}{t}$$

$$\rho = \frac{m}{\forall} \quad \Rightarrow \quad m = \rho\,\forall$$

$$P = \frac{\frac{1}{2}\,(\rho\,\forall)\,V^2}{t} = \frac{1}{2}\,\rho\,V^2\,\frac{\forall}{t}$$

$$P = \frac{1}{2} \rho V^2 Q$$

$$\rho = \frac{\gamma}{g}$$

$$P = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} V^2 Q$$

$$P = \gamma Q \frac{V^2}{2g} = 115779.18$$

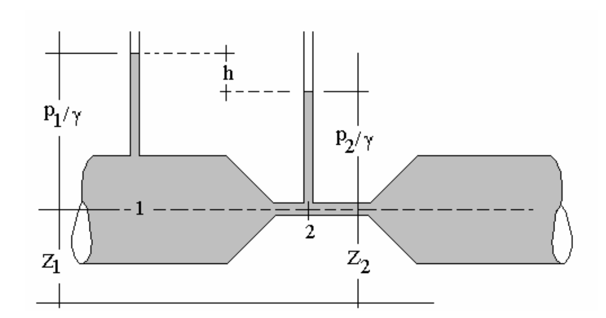
$$P = \gamma Q z_1$$

$$P = 1000 \text{ x } 0.385 \text{ x } 300.00$$

$$P = 115500 \frac{\text{kg m}}{\text{s}}$$

$$P_{CV} = \frac{115000}{75} = 1534.38 \text{ CV}$$

Problema 3.14
Calcular el gasto que circula por el venturímetro que se muestra en la figura.



Determinación del caudal

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2 se obtiene

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

Las cotas de los puntos 1 y 2 son iguales y la diferencia de altura de presiones es

$$\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} = h$$

Mediante de la ecuación de continuidad se obtiene

$$Q_1 = Q_2 \qquad \Rightarrow \qquad V_1\, A_1 = V_2\, A_2 \qquad \Rightarrow \qquad V_1 = V_2 \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2$$

Al sustituir en la ecuación de Bernoulli se obtiene

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{\left(V_2 \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2\right)^2}{2\,g} + 0.00 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2\,g} + 0.00$$

$$\frac{V_2^2}{2\,g} - \frac{{V_2}^2}{2\,g}\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4 = h$$

$$\frac{V_2^2}{2\,g}\left[1 - \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4\right] = h$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{2\,g\,h}{1 - \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4}}$$

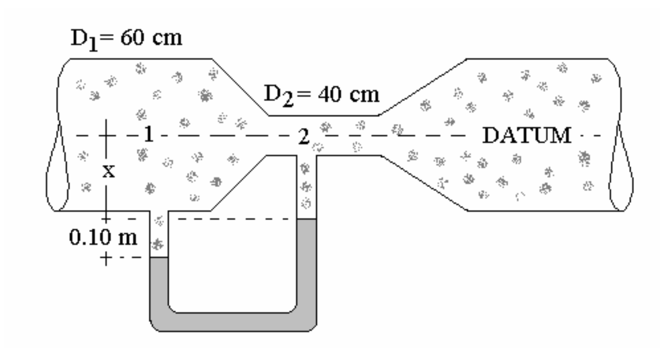
El caudal es

$$Q = V_2\, A_2$$

$$Q = \sqrt{\frac{2\,g\,h}{1 - \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4}} \left(\frac{\pi}{4}\, {D_2}^2\right)$$

$$Q = \frac{\pi}{4}\, {D_1}^2\, {D_2}^2 \sqrt{\frac{2\,g\,h}{{D_1}^4 - {D_2}^4}}$$

Problema 3.15
Un venturímetro horizontal tiene diámetros de 60 y 40 cm en la entrada y en la garganta respectivamente. La lectura de un manómetro diferencial de agua, es de 10 cm y fluye aire a través del aparato. Considerando constante e igual a 1.28 kg/m^3 el peso específico del aire y despreciando las pérdidas por fricción, determinar el caudal y hacer un esquema de la instalación.



Determinación de la diferencia de presiones a través del manómetro diferencial

$$p_1 + x\,\gamma_{aire} + 0.10\,\gamma_{aire} - 0.10\,\gamma_1 - x\,\gamma_{aire} = p_2$$

$$p_1 - p_2 = 0.10\,\gamma_1 - 0.10\,\gamma_{aire}$$

$$\frac{p_1}{\gamma_{aire}} - \frac{p_2}{\gamma_{aire}} = 0.10\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_{aire}} - 1\right)$$

$$\frac{p_1}{\gamma_{aire}} - \frac{p_2}{\gamma_{aire}} = 0.10\left(\frac{1000}{1.28} - 1\right) = 78.03$$

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2, considerando $z_1 = z_2$ se tiene

$$\frac{p_1}{\gamma_{aire}} + \frac{V_1^2}{2\,g} = \frac{p_2}{\gamma_{aire}} + \frac{V_2^2}{2\,g}$$

$$\frac{V_2^2}{2\,g} - \frac{V_1^2}{2\,g} = \frac{p_1}{\gamma_{aire}} - \frac{p_2}{\gamma_{aire}}$$

Mediante la ecuación de continuidad y sustituyendo el valor de la diferencia de presiones se tiene

$$Q_1 = Q_2 \quad \Rightarrow \quad V_1\,A_1 = V_2\,A_2 \quad \Rightarrow \quad V_1 = V_2\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2$$

$$\frac{V_2^2}{2\,g} - \frac{V_2^2}{2\,g}\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4 = 78.03$$

$$\frac{V_2^2}{2\,g}\left(1-\left(\frac{0.4}{0.6}\right)^4\right) = 78.03$$

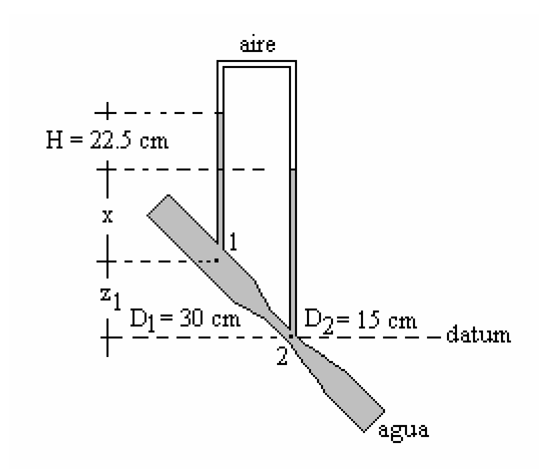
$$V_2 = \sqrt{\frac{78.03 \text{ x } 2 \text{ x } 9.81}{\left(1-\left(\frac{0.4}{0.6}\right)^4\right)}} = 43.68 \text{ m/s}$$

El caudal es

$$Q = V_2 \; A_2$$

$$Q = 43.68 \; \frac{\pi}{4} 0.40^2 = 5.49 \text{ m}^3\text{/s}$$

Problema 3.16
Hallar el caudal que circula a través del venturímetro que se muestra en la figura.



Determinación de la diferencia de presiones a través del manómetro diferencial

$$p_1 - x\,\gamma - 0.225\,\gamma + x\,\gamma + z_1\,\gamma = p_2$$

$$p_2 - p_1 = z_1\,\gamma - 0.225\,\gamma$$

$$\frac{p_2}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma} = (z_1 - 0.225)$$

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2, y considerando $z_2 = 0$, se tiene

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2\,g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2\,g} + 0.00$$

$$\frac{V_1^2}{2\,g} - \frac{V_2^2}{2\,g} = \frac{p_2}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma} - z_1$$

Mediante la ecuación de continuidad se obtiene

$$Q_1 = Q_2 \;\Rightarrow\; V_1\,A_1 = V_2\,A_2 \;\Rightarrow\; V_1 = V_2\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 \;\Rightarrow\; V_1 = V_2\left(\frac{15}{30}\right)^2 \;\Rightarrow\; V_1 = \frac{V_2}{4}$$

Sustituyendo se obtiene

$$\frac{\left(\frac{V_2}{4}\right)^2}{2\,g} - \frac{V_2^2}{2\,g} = (z_1 - 0.225) - z_1$$

al simplificar y despejar resulta

$$V_2 = \sqrt{\frac{-0.225 \text{ x } 2 \text{ x } 9.81}{\frac{1}{16} - 1}} = 2.17 \text{ m/s}$$

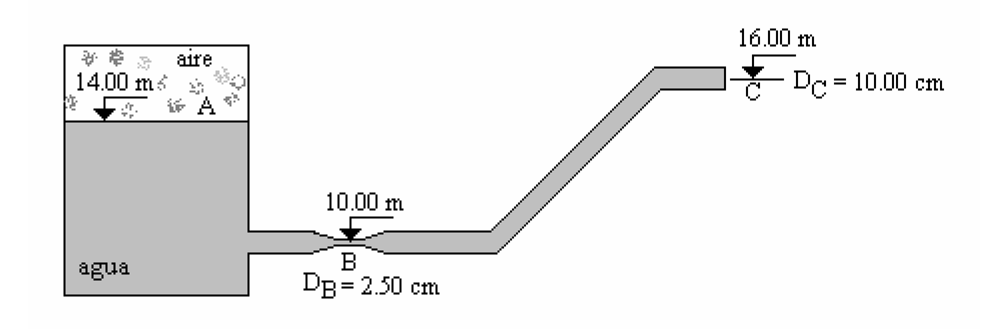
El caudal es

$$Q = V_2\;A_2$$

$$Q = 2.17\,\frac{\pi}{4}\,0.15^2 = 0.038\;\text{ m}^3\text{/s}$$

Q = 38 lts/s

Problema 3.17
Calcular la presión manométrica en A, si la presión absoluta en el estrechamiento de la tubería es de 0.15 kg/cm^2. Suponer una presión atmosférica de 1.033 kg/cm^2



Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos B y C y considerando presiones absolutas, se tiene

$$\frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2\,g} + z_B = \frac{p_C}{\gamma} + \frac{V_C^2}{2\,g} + z_C$$

$$\frac{0.15 \times 10^4}{1000} + \frac{V_B^2}{2\,g} + 10.00 = \frac{1.033 \times 10^4}{1000} + \frac{V_C^2}{2\,g} + 16.00$$

Mediante la ecuación de continuidad se obtiene

$$Q_B = Q_C \;\Rightarrow\; V_B\,A_B = V_C\,A_C \;\Rightarrow\; V_B = V_C\left(\frac{D_C}{D_B}\right)^2 \;\Rightarrow\; V_B = V_C\left(\frac{10}{2.5}\right)^2 \;\Rightarrow\; V_B = 16\,V_C$$

$$\frac{(16\,V_C)^2}{2\,g} - \frac{V_C^2}{2\,g} = 16.00 + 10.33 - 10.00 - 1.50$$

$$\frac{(16V_C)^2}{2\,g} - \frac{V_C^2}{2\,g} = 14.83$$

$$V_C = \sqrt{\frac{2 \times 9.81 \times 14.83}{15}} = 1.14 \text{ m/s}$$

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos A y C y considerando presiones absolutas, se tiene

$$\frac{P_A}{1000} + 0.00 + 14.00 = \frac{1.033 \times 10^4}{10^3} + \frac{1.14^2}{19.62} + 16.00$$

$$\frac{P_A}{1000} = 10.33 + 0.07 + 16.00 - 14.00$$

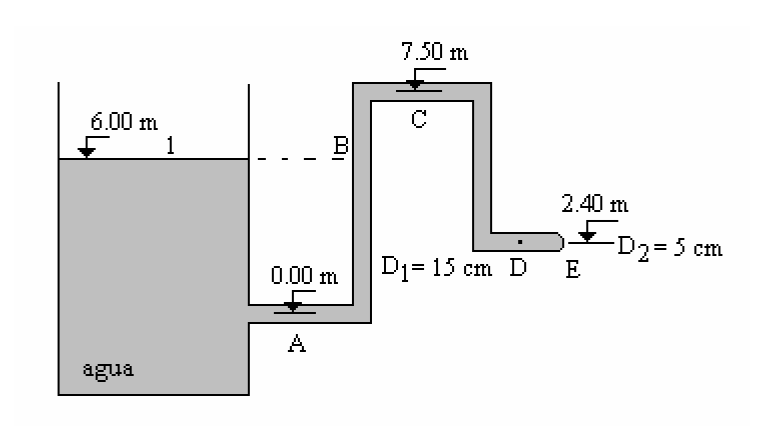
$$\frac{P_A}{1000} = 12.40 \qquad \Rightarrow P_A = 12400 \text{ kg/m}^2 \qquad \Rightarrow \qquad P_A \text{ (absoluta)} = 1.240 \text{ kg/cm}^2$$

P_A (manométrica) = 1.240 − 1.033 = 0.2070 kg/cm^2

Problema 3.18

Para la instalación que se muestra. Determinar

a) El caudal.
b) La presión en los puntos A, B, C, D y E.
c) ¿A que cota debe encontrarse el punto E para que el caudal aumente en un 50%, para este caso cuál es la presión en el punto C?.



Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y E , se tiene

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2\,g} + z_1 = \frac{p_E}{\gamma} + \frac{V_E^2}{2\,g} + z_E$$

$$0.00 + 0.00 + 6.00 = 0.00 + \frac{V_E^2}{2\,g} + 2.40$$

$$V_E = \sqrt{(6.00 - 2.40)\,2 \text{ x } 9.81} = 8.40 \text{ m/s}$$

Determinación del caudal

$$Q = V_E \; A_E = 8.40 \; \frac{\pi}{4} \; 0.05^2 = 0.0165 \text{ m}^3\text{/s}$$

$$V_A = \frac{Q}{A_A} = \frac{0.0165}{\frac{\pi}{4}\,0.15^2} = 0.933 \text{ m/s}$$

Determinación de las presiones

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y A, se tiene

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2\,g} + z_1 = \frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2\,g} + z_A$$

$$0.00 + 0.00 + 6.00 = \frac{p_A}{\gamma} + \frac{0.933^2}{19.62} + 0.00 \Rightarrow \frac{P_A}{\gamma} = 6.00 - 0.044 \Rightarrow P_A = 5956 \text{ kg/m}^2.$$

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y B se tiene

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2\,g} + z_1 = \frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2\,g} + z_B$$

$$0.00 + 0.00 + 6.00 = \frac{p_B}{\gamma} + \frac{0.933^2}{19.62} + 6.00 \Rightarrow \frac{p_B}{\gamma} = -0.44 \Rightarrow p_B = -0.44 \text{ kg/m}^2.$$

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y C, se tiene

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2\,g} + z_1 = \frac{p_C}{\gamma} + \frac{V_C^2}{2\,g} + z_C$$

$$0.00 + 0.00 + 6.00 = \frac{p_C}{\gamma} + \frac{0.933^2}{19.62} + 7.50 \Rightarrow \frac{p_C}{\gamma} = 6.00 - 7.50 - 0.44 \Rightarrow p_C = -1544 \text{ kg/m}^2.$$

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y D, se tiene

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2\,g} + z_1 = \frac{p_D}{\gamma} + \frac{V_D^2}{2\,g} + z_D$$

$$0.00 + 0.00 + 6.00 = \frac{p_D}{\gamma} + \frac{0.933^2}{19.62} + 2.40 \Rightarrow \frac{p_D}{\gamma} = 6.00 - 2.40 - 0.044 \Rightarrow p_C = 3556 \;\; kg/m^2.$$

$p_E = 0.00$ kg/m^2, por estar en contacto con la atmósfera.

Determinación del caudal para el caso c

$$Q = 0.0165 + \left(\frac{50}{100}\right) x\; 0.0165 = 0.0248$$

En este caso las velocidades en los puntos E′ y C son

$$V_E' = \frac{Q}{A_E} = \frac{0.0248}{\frac{\pi}{4}0.05^2} = 12.64 \;\; m/s$$

$$V_C = \frac{0.0248}{\frac{\pi}{4}0.15^2} = 0.40 \;\; m/s$$

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y E′, se tiene

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2\,g} + z_1 = \frac{p_{E'}}{\gamma} + \frac{V_{E'}^2}{2\,g} + z_{E'}$$

$$0.00 + 0.00 + 6.00 = 0.00 + \frac{12.64^2}{19.62} + Z_E'$$

$$Z_E' = 6.00 - \frac{12.64^2}{19.62}$$

$$Z_E' = -2.14 \text{ m}$$

Determinación de la presión en el punto C

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y C, se tiene

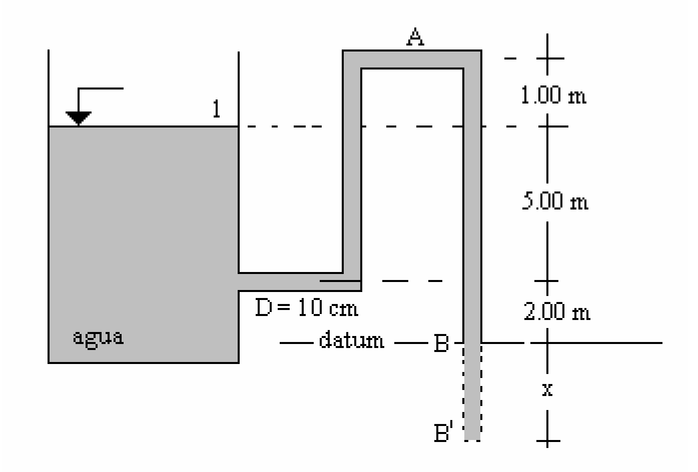
$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2\,g} + z_1 = \frac{p_C}{\gamma} + \frac{V_C^2}{2\,g} + z_C$$

$$0.00 + 0.00 + 6.00 = \frac{p_C}{\gamma} + \frac{1.40^2}{19.62} + 7.50$$

$$\frac{p_C}{\gamma} = 6.00 - 7.50 - 0.10 = -1.60$$

$$p_C = -1600 \ \text{kg/m}^2$$

Problema 3.19
Para el esquema que se muestra en la figura, determinar el caudal y la presión en el punto A. Hasta cuanto puede aumentar el caudal bajando el punto de salida B, en una distancia X, si la presión en el punto A es cero absoluto. Para esta condición calcular el valor de X.



Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y B se tiene

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2\,g} + z_1 = \frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2\,g} + z_B$$

$$0.00 + 0.00 + 7.00 = 0.00 + \frac{V_B^2}{2\,g} + 0.00 \Rightarrow V_B = \sqrt{19.62 \text{ x } 7.00} = 11.72 \text{ m/s}$$

Determinación del caudal

$$Q = V_B\,A_B = 11.72\,\frac{\pi}{4}\,0.10^2 = 0.092 \text{ m}^3\text{/s} \qquad \Rightarrow \qquad Q = 92.00 \text{ lts/s}$$

Determinación de la presión en el punto A

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2\,g} + z_1 = \frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2\,g} + z_A$$

$$0.00 + 0.00 + 7.00 = \frac{p_A}{\gamma} + \frac{11.72^2}{19.62} + 8.00 \Rightarrow \frac{p_A}{\gamma} + = 7.00 - 8.00 - \frac{11.72^2}{19.62} = -8.00$$

$p_A = -8000$ kg/m^2

Determinación de la distancia x

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos A y B′ se tiene

$$\frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2\,g} + z_A = \frac{p_{B'}}{\gamma} + \frac{V_{B'}^2}{2\,g} + z_{B'}$$

$$\frac{-1.033 \text{ x } 10^4}{1000} + \frac{V_{A'}^2}{2\,g} + 8.00 = 0.00 + \frac{V_{B'}^2}{2\,g} + (-x)$$

$x = 10.33 - 8.00$

$x = 2.33$ m

Determinación del nuevo caudal

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y B′ se tiene

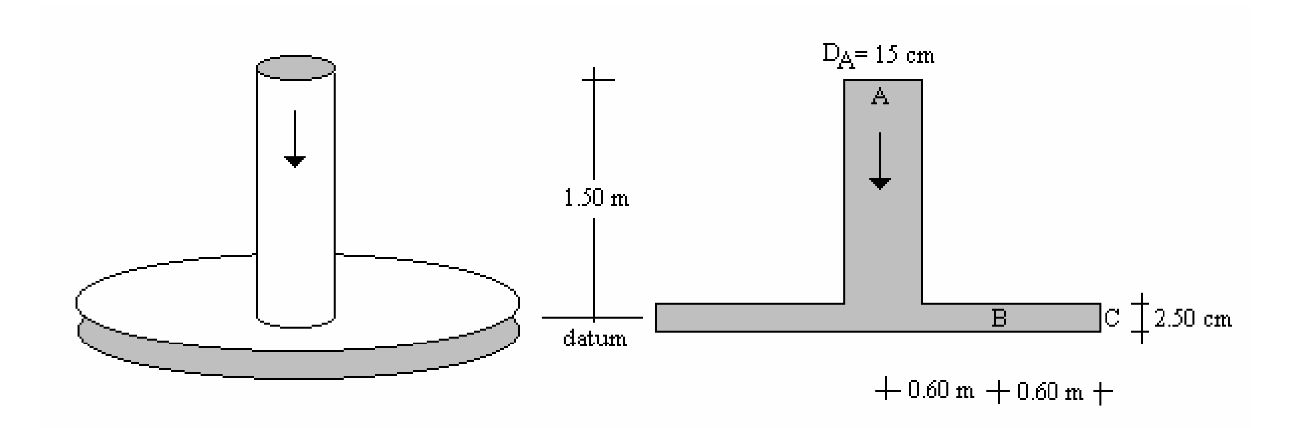
$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2\,g} + z_1 = \frac{p_{B'}}{\gamma} + \frac{V_{B'}^2}{2\,g} + z_{B'}$$

$$0.00 + 0.00 + 7.00 = 0.00 + \frac{V_{B'}^2}{2\,g} + (-2.33)$$

$$\frac{{V_{B'}}^2}{2\,g} = 9.33 \rightarrow V_B' = \sqrt{19.62 \text{ x } 9.33} = 13.53 \text{ m/s}$$

$$Q' = 13.53 \frac{\pi}{4} 0.10^2 = 0.106 \text{ m}^3\text{/s} \qquad \Rightarrow \qquad Q' = 106.00 \text{ lts/s}$$

Problema 3.20
El agua fluye radialmente entre dos placas circulares situadas en el extremo de una tubería de 15 cm de diámetro, como se muestra en la figura. Despreciando las pérdidas de energía, si la presión en A es de – 0.5 kg/cm^2. Determinar el caudal en lts/s y la presión en el punto B.



Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos A y C se tiene

$$\frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2\,g} + z_A = \frac{p_C}{\gamma} + \frac{V_C^2}{2\,g} + z_C$$

$$\frac{-0.5 \times 10^4}{1000} + \frac{V_A^2}{2\,g} + 1.50 = 0.00 + \frac{V_C^2}{2\,g} + 0.00$$

Mediante la ecuación de continuidad se obtiene

$$Q_A = Q_C \quad \Rightarrow \quad V_A\,A_A = V_C\,A_C$$

Si A_A es área transversal del tubo y A_C el área perimetral por donde sale el agua, se tiene

$$V_A\,\frac{\pi}{4}\,0.15^2 = V_C\;2 \times \pi \times 1.20 \times 0.025$$

$$V_A = V_C\,\frac{2\;\pi\,1.20 \times 0.025}{\frac{\pi}{4}\,0.15^2}$$

$$V_A = 10.67\,V_C$$

$$-5.00 + \frac{(10.67 \times V_C)^2}{2\,g} + 1.50 = \frac{V_C^2}{2\,g}$$

$$\frac{(10.67 \text{ x } V_C)^2}{2\text{ g}} - \frac{V_C^2}{2\text{ g}} = 5 - 1.50$$

$$\frac{V_C^2}{2\text{ g}}\ (10.67^2 - 1) = 3.50$$

$$V_C = \sqrt{\frac{3.50 \text{ x } 19.62}{10.67^2 - 1.00}} = 1.78 \text{ m/s} \quad \text{y} \quad V_A = 10.67\ V_C = 10.67 \text{ x } 0.78 = 8.32 \text{ m/s}$$

$$Q = V_C\ A_C = 1.78 \text{ x } 2\ \pi \text{ x } 1.20 \text{ x } 0.025$$

$$Q = 0.15\ \text{m}^3/\text{s}$$

$$Q = 150 \text{ lts/s}$$

Determinación de la presión en el punto B

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos A y B se tiene

$$\frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2\text{ g}} + z_A = \frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2\text{ g}} + z_B$$

$$\frac{-0.5 \text{ x } 10^4}{1000} + \frac{8.32^{\ 2}}{2\text{ g}} + 1.50 = \frac{p_B}{1000} + \frac{V_B^2}{2\text{ g}} + 0.00$$

Mediante la ecuación de continuidad se obtiene

$$Q_A = Q_B \quad \Rightarrow \quad V_A\ A_A = V_B\ A_B$$

Si A_A es el área transversal del tubo y A_B el área perimetral en la sección perimetral que pasa por B, se tiene

$$8.32\ \frac{\pi}{4}\ 0.15^2 = V_B\ \ 2 \text{ x } \pi \text{ x } 0.60 \text{ x } 0.025$$

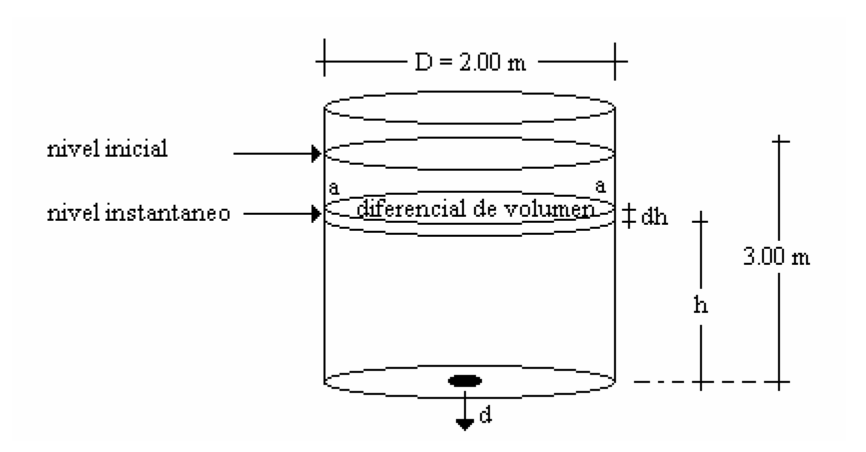
$$V_B = 1.56 \text{ m/s}$$

Sustituyendo en la ecuación de Bernoulli se tiene

$$\frac{-0.5 \text{ x } 10^4}{1000} + \frac{8.32^{\ 2}}{2\text{ g}} + 1.50 = \frac{p_B}{1000} + \frac{1.56^{\ 2}}{2\text{ g}} + 0.00$$

$$p_B = -\ 90 \text{ kg/m}^2$$

Problema 3.21
El depósito que se muestra en la figura tiene forma de cilindro. Cuál deberá ser el diámetro del orificio para vaciar el depósito en seis minutos si la altura inicial es de 3 m.



Aplicando la ecuación de Bernoulli entre la superficie instantánea del agua y el orificio de salida, y considerando la velocidad de descenso del agua despreciable, se tiene

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

$$0.00 + 0.00 + h = 0.00 + \frac{V_2^2}{2\,g} + 0.00$$

$$V_2 = \sqrt{2\,g\,h}$$

El caudal es

$$Q = V_2\,A_2$$

$$Q = \left(\frac{\pi}{4}\,d^2\right)\sqrt{2\,g\,h}$$

El caudal en una sección instantánea a-a, es

$$Q_{a\text{-}a} = \frac{d\forall}{d\,t} = \frac{\frac{\pi}{4}\,2.00^2\;d\,h}{d\,t}$$

Igualando las expresiones del caudal se obtiene

$$\frac{\pi}{4} d^2 \sqrt{2\,g}\,\sqrt{h} = \frac{\pi\, d h}{d t}$$

$$\frac{d^2 \sqrt{2\,g}}{4} \int_0^T d t = \int_0^3 h^{-1/2}\, d h$$

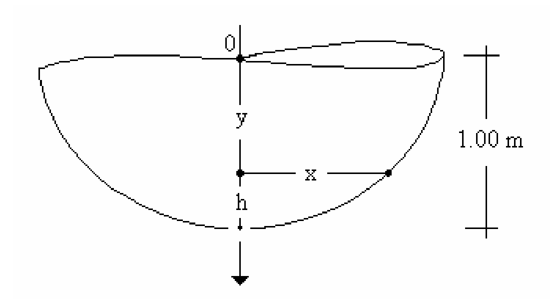
$$\frac{d^2 \sqrt{2\,g}}{4} \left[t\right]_0^{360} = 2\left[h^{1/2}\right]_0^3$$

$$\frac{d^2}{4} \sqrt{2\,g}\;\; 360 = 2\,(3)^{1/2}$$

$$\left(d^2\right)^{1/2} = \left(\frac{2\,(3)^{1/2} \text{ x } 4}{360\sqrt{2\,g}}\right)^{1/2}$$

$$d = 0.093 \text{ m}$$

Problema 3.22
Media esfera de 2 m de diámetro se encuentra llena de agua. Si en el fondo se encuentra un orificio de 5 cm de diámetro. Determinar que tiempo tarda en vaciarse el depósito. Despreciar el coeficiente de descarga Cd del orificio.



Aplicando la ecuación de Bernoulli entre la superficie instantánea del agua y el orificio de salida, y considerando la velocidad de descenso del agua como despreciable, se tiene

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2\,g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2\,g} + z_2$$

$$0.00 + 0.00 + h = 0.00 + \frac{V_2^2}{2\,g} + 0.00$$

$$V_2 = \sqrt{2\,g\,h}$$

Como h = 1 − y, se tiene

$$V_2 = \sqrt{2\,g\,(1 - y)}$$

El caudal es

$$Q = V_2\,A_2$$

$$Q = \left(\frac{\pi}{4}\,d^2\right)\sqrt{2\,g\,(1 - y)}$$

El caudal en una sección instantánea a-a, es

$$Q_{a\text{-}a} = \frac{d\,\forall}{d\,t} = \frac{\pi\,x^2\,d\,y}{d\,t}$$

Como

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 = 1 - y^2$$

$$Q_{a\text{-}a} = \frac{d\,\forall}{d\,t} = \frac{\pi\left(1 - y^2\right)d\,y}{d\,t}$$

Igualando las expresiones del caudal; es obtiene,

$$\left(\frac{\pi}{4}\,d^2\right)\sqrt{2\,g\,(1 - y)} = \frac{\pi\left(1 - y^2\right)d\,y}{d\,t}$$

$$\left(1 - y^2\right)\,d\,y = \frac{d^2}{4}\,\sqrt{2\,g}\,\,(1 - y)^{1/2}\,\,d\,t$$

$$\frac{1-y^2}{\sqrt{1-y}}\,dy = \frac{d^2}{4}\sqrt{2\,g}\;dt$$

$$\frac{d^2}{4}\sqrt{2\,g}\int_0^T dt = \int_0^1 \frac{(1-y)\,(1+y)}{\sqrt{1-y}}\,dy$$

para la realización de la integral se hace el cambio de variable

$$1-y = u^2 \quad \Rightarrow \quad y = 1-u^2 \quad \Rightarrow \quad dy = -\,2\,u\,du$$

siendo los nuevos límites de integración

para $y = 0 \Rightarrow u = 1$ y para $y = 1 \Rightarrow u = 0$, entonces

$$\frac{d^2}{4}\sqrt{2\,g}\int_0^T dt = \int_1^0 \frac{\left(1-\left(1-u^2\right)\right)\left(1+\left(1-u^2\right)\right)(-2)\,u\,du}{u}$$

$$\frac{d^2}{4}\sqrt{2\,g}\int_0^T dt = \int_1^0\left(-\,4\,u^2-2\,u^4\right)du$$

$$\frac{d^2}{4}\sqrt{2\,g}\,\left[t\right]_0^T = \left[-\frac{4\,u^3}{3}+\frac{2\,u^5}{5}\right]_1^0$$

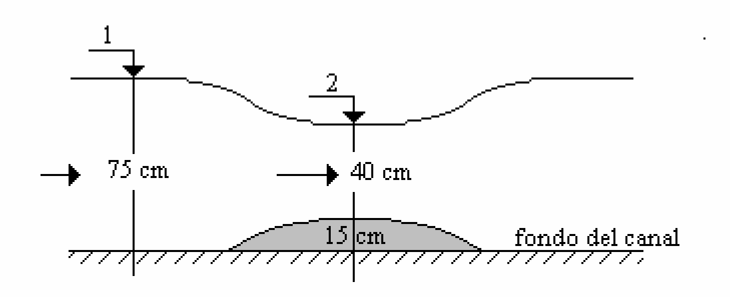
$$\frac{d^2}{4}\sqrt{2\,g}\;T = \left[(-0+0)-\left(-\frac{4}{3}+\frac{2}{5}\right)\right]$$

$$\frac{d^2}{4}\sqrt{2\,g}\;T = 0.93$$

$$T = \frac{0.93 \text{ x } 4}{0.05^2\sqrt{2 \text{ x } 9.81}}$$

$$T = 335.93 \text{ s}$$

Problema 3.23
Suponiendo que no hay pérdidas de energía, calcular el gasto que fluye por un canal de 1.00 m de ancho, si la sección en el fondo se eleva 15 cm y la superficie del agua desciende hasta 40 cm, según se indica en el esquema.



Aplicando al ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2, en la superficie del agua, se tiene

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

$$0.00 + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = 0.00 + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

mediante la ecuación de continuidad; se tiene,

$$Q_1 = Q_2 \quad \Rightarrow \quad V_1 A_1 = V_2 A_2 \quad \Rightarrow \quad V_1 B y_1 = V_2 B y_2$$

$$V_2 = V_1 \frac{y_1}{y_2} \quad \Rightarrow \quad V_2 = V_1 \frac{0.75}{0.40} = 1.875 V_1$$

Al sustituir

$$\frac{V_1^2}{2g} + 0.75 = \frac{(1.875 V_1)^2}{2g} + (0.40 + 0.15)$$

al simplificar y despejar se obtiene

$$V_1 = \sqrt{\frac{2 \text{ x } 9.81(-0.20)}{1 - 1.875^2}}$$

$$V_1 = 1.25 \text{ m/s}$$

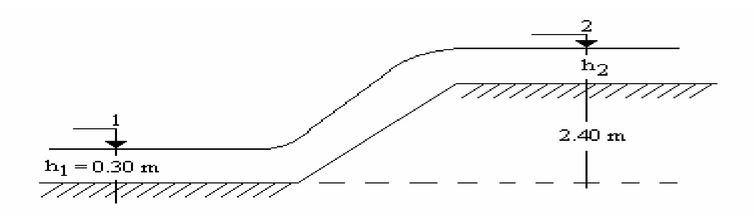
El caudal es

$Q = V_1 A_1 = 1.25 \times 0.75 \times 1.00 = 0.983 \ m^3/s$

Problema 3.24

En el canal rectangular, de 1.80 m de ancho que se muestra en la figura, el agua tiene una velocidad de aproximación de 10.00 m/s. Determinar, despreciando las pérdidas de energía:

a) Las posibles alturas, h_2.
b) El número de Froude en las secciones 1 y 2.



Aplicando la ecuación de Bernoulli entre las secciones 1 y 2 se tiene

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

$$0.00 + \frac{10^2}{19.62} + 0.30 = 0.00 + \frac{V_2^2}{2g} + (2.40 + h_2)$$

Según la ecuación de continuidad

$V_1 \ A_1 = V_2 \ A_2$

$$V_2 = \frac{V_1 \ A_1}{A_2} = \frac{10.00\ (1.80 \times 0.30)}{(1.80\ h_2)} = \frac{3}{h_2}$$

Sustituyendo en la ecuación de Bernoulli; se tiene,

$$5.10 + 0.30 = \frac{\left(\dfrac{3}{h_2}\right)^2}{2 \times 9.81} + 2.40 + h_2$$

Después de simplificar se obtiene

$$h_2^3 - 3.05\ h_2^2 + 0.46 = 0$$

la ecuación cúbica, anteriror tiene como raices reales,

$h_2 = 0.42$ m , $h_2 = 2.94$ m y $h_2 = -0.31$ m, ésta última no tiene sentido físico

el valor de la altura h_2 depende de si las condiciones del flujo aguas abajo permiten que se produzcan flujo subcrítico o supercrítico.

Determinación del número de Froude

$$F_1 = \frac{V_1}{\sqrt{g\,y_1}} = \frac{10.00}{\sqrt{9.81 \times 0.30}} = 5.83 \quad \text{(Flujo supercrítico)}$$

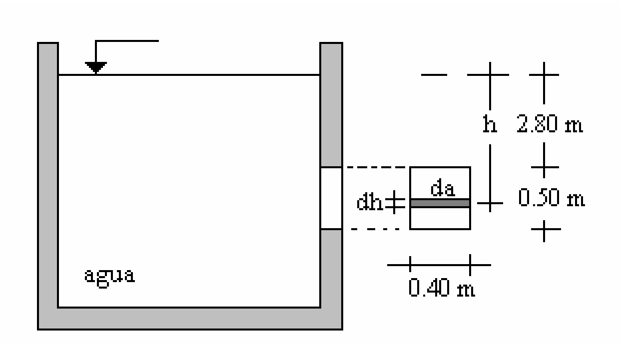
$$F_2 = \frac{V_2}{\sqrt{g\,y_2}} = \frac{\left(10.00 \times \dfrac{0.30}{0.42}\right)}{\sqrt{9.81 \times 0.42}} = 3.52 \quad \text{(Flujo supercrítico)}$$

$$F_2 = \frac{V_2}{\sqrt{g\,y_2}} = \frac{\left(10.00 \times \dfrac{0.30}{2.94}\right)}{\sqrt{9.81 \times 2.94}} = 0.19 \quad \text{(Flujo subcrítico)}$$

Problema 3.25
El agua de una piscina descarga a través de una abertura que tiene 0.40 m de ancho y 0.50 m de altura. La parte superior de la abertura es de 2.80 m por debajo de la superficie del agua. determinar:

a) La descarga teórica, mediante integración.
b) La descarga si se considera la abertura como un pequeño orificio
c) El porcentaje de error

Nota: Despreciar la velocidad de descenso del nivel superficial.



Determinación del caudal mediante integración

Aplicando al ecuación de Bernoulli entre la superficie del agua y un punto de altura h de la abertura de salida, y considerando la velocidad de descenso del agua despreciable, se tiene

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z_2$$

$$0.00 + 0.00 + h = 0.00 + \frac{V^2}{2\,g} + 0.00$$

$$V = \sqrt{2\,g\,h}$$

Como la velocidad es variable ya que depende de la altura h, el caudal se puede obtener mediante integración así,

$$dQ = V\,da = 0.40\,d\,h\,\sqrt{2\,g\,h}$$

$$Q = 0.40\,\sqrt{2\,g}\int_{2.80}^{3.30} h^{1/2}\,dh$$

$$Q = \frac{2}{3}\,0.40\,\sqrt{2\,g}\,\left(3.30^{3/2} - 2.80^{3/2}\right)$$

$$Q = 1.54\ m^3/s$$

Determinación del caudal considerando la abertura como un pequeño orificio

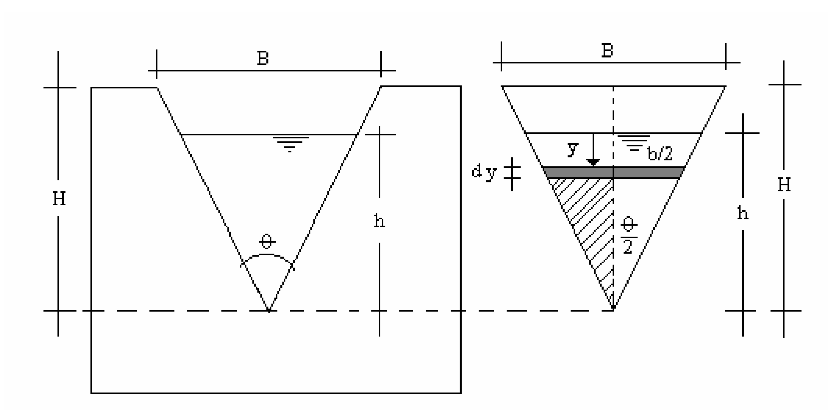
$$Q_a = 0.40 \times 0.50\,\sqrt{2 \times 9.81 \times 1.20}$$

$$Q = 1.55\ m^3/s$$

$$Error\ \% = \frac{1.55 - 1.54}{1.54} \times 100$$

$$Error = 0.65\ \%$$

Problema 3.26
Desarrollar una fórmula para calcular el gasto que circula por el vertedero que se muestra en la figura.



Aplicando al ecuación de Bernoulli entre la superficie del agua y un elemento de diferencial de área; se tiene,

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

$$0.00 + 0.00 + y = 0.00 + \frac{V_2^2}{2\,g} + 0.00$$

$$V_2 = \sqrt{2\,g\,y} \qquad \text{y} \qquad da = b\,dy$$

Por relación de triángulos se tiene

$$\frac{h - y}{b} = \frac{H}{B} \quad \Rightarrow \quad b = \left(\frac{h - y}{H}\right) B$$

El caudal es

$$Q = \int_0^h V\,dA = \int_0^h \sqrt{2\,g\,y}\left(\frac{h - y}{H}\right) B\,dy$$

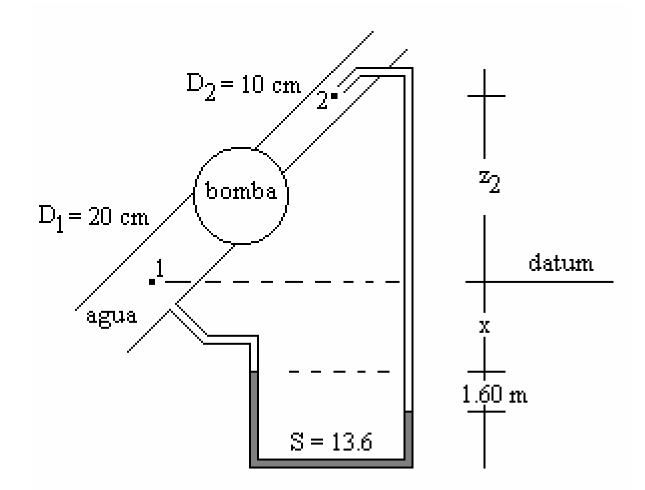
$$Q = \sqrt{2\,g}\;\frac{B}{H}\left(\int_0^h \sqrt{y}\;h\;dy - \int_0^h \sqrt{y}\;y\,dy\right)$$

$$tg\,\frac{\theta}{2} = \frac{\left(\frac{B}{2}\right)}{H}$$

Resolviendo; se tiene,

$$Q = \frac{8}{15}\sqrt{2\,g}\;\;tg\,\frac{\theta}{2}\,h^{5/2}$$

Problema 3.27
En la bomba de prueba de la figura, circula un el caudal es de 100 lts/s. Determinar la potencia teórica de la bomba.



Aplicando la ecuación de Bernoulli entre las secciones 1 y 2 se tiene

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + H_B = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_2$$

$Z_1 = 0$

$V_2 = 0$ (por ser un punto de estancamiento)

$$H_B = \left(\frac{p_2}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma} + z_2\right) - \frac{V_1^2}{2g}$$

Por continuidad se tiene

$$Q = V_1 A_1 \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.100}{\frac{\pi}{4}(0.20)^2} = 3.18 \text{ m/s}$$

A través del manómetro diferencial se tiene

$$p_1 + x\gamma + 1.60 \times 13600 - 1.60 \times 1000 - x\gamma - z_2\gamma = p_2$$

$$p_1 - p_2 = 1.60 \times 13600 - 1.60 \times 1000 - z_2\gamma$$

$$\frac{p_2}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma} + z_2 = 20.16$$

Sustituyendo en la ecuación de Bernoulli se tiene

$$H_B = 20.16 - \frac{(3.18)^2}{19.62} = 19.64 \text{ m}$$

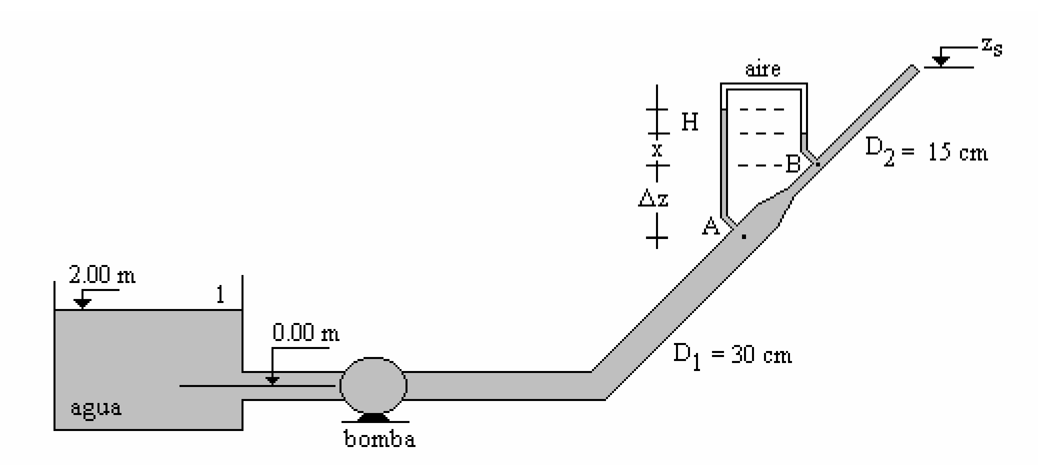
Determinación de la potencia

$$P = \frac{Q\,\gamma\,H_B}{75} = \frac{0.100 \times 1000 \times 19.64}{75}$$

$$P = 26.19 \text{ CV}$$

Problema 3.28

La bomba que se muestra en la figura tiene una potencia de 50 CV. Determinar la cota del punto de salida S, si la lectura manométrica es H = 22.50 cm.



El caudal se determina a través de la reducción que se encuentra en la parte superior de la instalación

Determinación de la diferencia de presiones entre los puntos B y A

$$p_A - \gamma\,\Delta z - \gamma\,x - \gamma\,H + \gamma\,x = p_B$$

$$p_B - p_A + \gamma\,\Delta z = -\gamma\,H$$

$$\frac{p_B}{\gamma} - \frac{p_A}{\gamma} + \Delta\,z = -H$$

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre las secciones A y B se tiene

$$\frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A = \frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} + z_B$$

$$\frac{V_A^2}{2g} - \frac{V_B^2}{2g} = \frac{p_B}{\gamma} - \frac{p_A}{\gamma} + \Delta z$$

sustituyendo se obtiene

$$\frac{V_A^2}{2g} - \frac{V_B^2}{2g} = -H$$

mediante la ecuación de continuidad; se tiene,

$$Q_A = Q_B \quad \Rightarrow \quad V_A A_A = V_B A_B \quad \Rightarrow \quad V_A \frac{\pi}{4} D_A{}^2 = V_B \frac{\pi}{4} D_B{}^2 \quad \Rightarrow \quad V_B = V_A \frac{D_A{}^2}{D_B{}^2}$$

de donde,

$$\frac{V_A^2}{2g}\left(1 - \left(\frac{D_A}{D_B}\right)^4\right) = -H$$

$$V_A = \sqrt{\frac{-2\,g\,H}{1 - \left(\frac{D_A}{D_B}\right)^4}}$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$V_A = \sqrt{\frac{-2 \text{ x } 9.81 \text{ x } 0.225}{1 - \left(\frac{0.30}{0.15}\right)^4}} = 0.54 \text{ m/s}$$

la velocidad V_B, es igual a la velocidad $V_{S,}$ ya que el diámetro permanece constante

$$V_B = V_A \frac{D_A{}^2}{D_B{}^2} \quad \Rightarrow \quad V_B = 0.54 \frac{0.30^2}{0.15^2} = 2.16 \text{ m/s}$$

El caudal es
$Q = V_A A_A$

$$Q = 0.54 \frac{\pi}{4} 0.30^{\,2} = 0.038 \text{ m}^3\text{/s}$$

La altura de bombeo H_B, se determina a partir de la potencia de la bomba; así,

$$P = \frac{Q\,\gamma\,H_B}{75} \quad \Rightarrow \quad H_B = \frac{75\,P}{Q\,\gamma} = \frac{75 \text{ x } 50}{0.038 \text{ x } 1000} = 98.68 \text{ m}$$

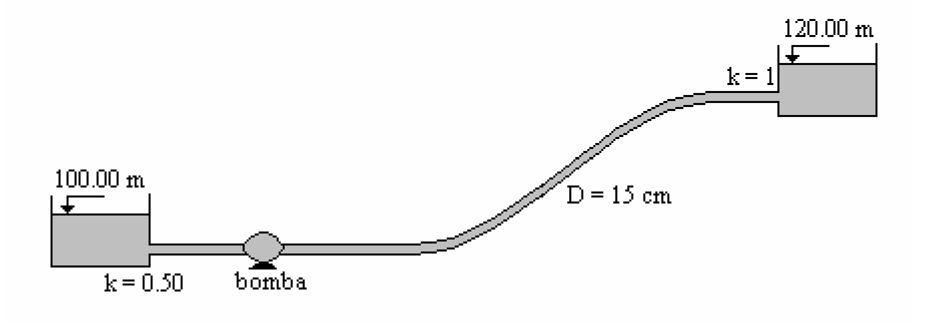
La determinación de la cota de salida se obtiene aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y S

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + H_B = \frac{p_S}{\gamma} + \frac{V_S^2}{2g} + z_S$$

$$0.00 + 0.00 + 2.00 + 98.68 = 0.00 + \frac{2.16^2}{2 \times 9.81} + z_S$$

$$z_S = 100.44 \text{ m}$$

Problema 3.29
La potencia comunicada al fluido por una bomba, es de 10 CV. Si las pérdidas por fricción se pueden suponer como 8 $V^2/2g$ y el coeficiente de pérdida en la entrada K_1 es 0.50 y en la salida K_2 es 1. Determinar el caudal.



La altura de bombeo H_B, se determina a partir de la potencia de la bomba; así,

$$P = \frac{Q\,\gamma\,H_B}{75} \qquad \Rightarrow \qquad H_B = \frac{75\,P}{Q\,\gamma}$$

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2 se tiene,

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + H_B = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_2 + \sum h_f$$

$$0.00 + 0.00 + 100.00 + \frac{75\,P}{1000\,Q} = 0.00 + 0.00 + 120.00 + 8\,\frac{V^2}{2\,g} + 0.5\,\frac{V^2}{2\,g} + 1\,\frac{V^2}{2\,g}$$

como $\quad Q = V\,A \quad \Rightarrow \quad V = \dfrac{Q}{\frac{\pi}{4}\,0.15^2}$, se obtiene al sustituir

$$100.00 + \frac{75 \times 10}{1000\,Q} = 120.00 + 9.5\,\frac{\left(\dfrac{Q}{0.785 \times 0.15^2}\right)^2}{2\,g}$$

lo anterior se puede expresar como

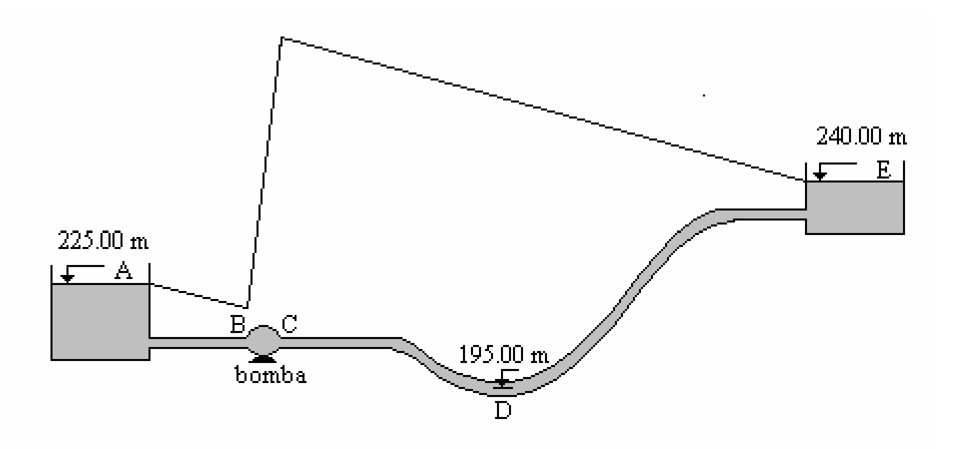
$1552\,Q^3 + 20\,Q - 0.75 = 0$

resolviendo se obtiene

$Q = 0.0345\ m^3/s$

Problema 3.30

Mediante una bomba se envía agua desde un depósito A, a una elevación de 225 m, hasta otro depósito E, a una elevación de 240 m, a través de una tubería de 30 cm de diámetro. La presión en la tubería de un punto D, a una elevación de 195 m, es de 5.60 kg/cm^2. Las perdidas de carga son: De A hasta la entrada de la bomba, punto B, 0.60 m, de la salida de la bomba, punto C, hasta el punto D, $38V^2/2g$ y desde el punto D hasta el depósito E $40V^2/2g$. Determinar el caudal en lts/min y la potencia de la bomba en Kw. Haga un esquema de la instalación.



Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos D y E se tiene,

$$\frac{p_D}{\gamma} + \frac{V_D^2}{2g} + z_D = \frac{p_E}{\gamma} + \frac{V_E^2}{2g} + z_E + 40\,\frac{V_D^2}{2g}$$

$$\frac{5.60 \times 10^4}{10^3} + \frac{V_D^2}{2g} + 195.00 = 0.00 + 0.00 + 240.00 + 40\,\frac{V_D^2}{2g}$$

$$39.00\,\frac{V_D^2}{2g} = 195.00 + 56.00 - 240.00$$

$V_D = 2.35$ m/s

Determinación del caudal

$$Q = V_D A_D = 2.35 \frac{\pi}{4} 030^2 = 0.166 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q = 0.166 \times 1000 \times 60 = 9960 \text{ lts/min}$$

Determinación de la potencia de la bomba

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos A y E se tiene,

$$\frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A + H_B = \frac{p_E}{\gamma} + \frac{V_E^2}{2g} + z_E + 0.60 + 38\frac{V_D^2}{2g} + 40\frac{V_D^2}{2g}$$

$$0.00 + 0.00 + 225.00 + H_B = 0.00 + 0.00 + 240.00 + 0.60 + 38\frac{V_D^2}{2g} + 40\frac{V_D^2}{2g}$$

$$H_B = 240.00 + 0.60 + 38\frac{V_D^2}{2g} + 40\frac{V_D^2}{2g} - 225.00$$

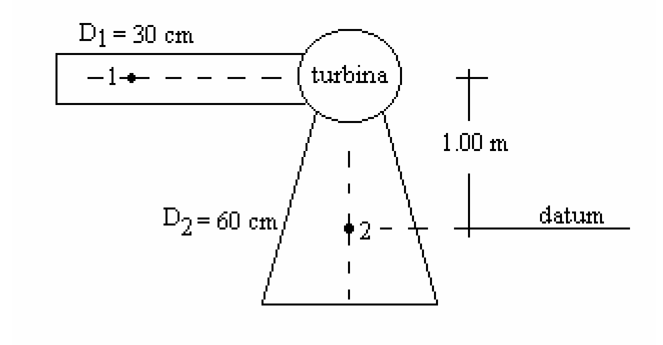
$$H_B = 15.60 + 78.00\frac{V_D^2}{2g} = 15.60 + 78.00\frac{2.35^2}{19.62} = 37.55 \text{ m}$$

$$P = \frac{Q\,\gamma\,H_B}{102.00} = \frac{0.166 \times 1000 \times 37.55}{102.00} = 61.11 \text{ Kw}$$

Problema 3.31

Determinar el caudal que está fluyendo a través de la turbina que se muestra en la figura si se extrae de la corriente de agua una potencia de 60 CV y las presiones en los puntos 1 y 2 son 1.50 kg/cm^2 y – 0.35 kg/cm^2, respectivamente.

D_1 = 30 cm y D_2 = 60 cm.



La potencia que el agua le suministra a la turbina es

$$P = \frac{Q\,\gamma\,H_T}{75} \qquad \Rightarrow \qquad H_T = \frac{75\,P}{1000\,Q}$$

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2 se tiene,

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + H_T$$

Al sustituir los valores numéricos

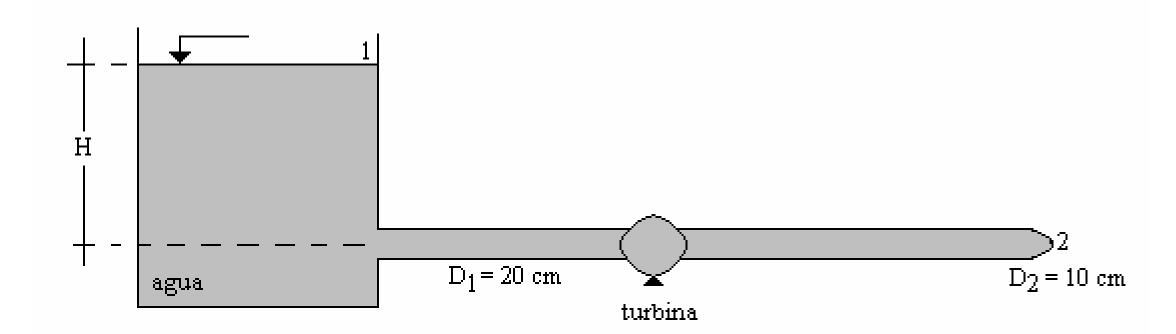
$$\frac{1.5 \text{ x } 10^4}{1000} + \frac{\left(\frac{Q}{0.785 \text{ x } 0.30^2}\right)^2}{19.62} + 1.00 = -\frac{0.35 \text{ x } 10^4}{1000} + \frac{\left(\frac{Q}{0.785 \text{ x } 0.60^2}\right)^2}{19.62} + 0.00 + \frac{75 \text{ x } 60.00}{1000\,Q}$$

simplificando se obtiene

$$9.57\,Q^3 + 19.50\,Q - 4.50 = 0$$

$$Q = 0.220 \text{ m}^3/\text{s}$$

Problema 3.32
Calcular la altura H que produce un caudal de 100 lps y una potencia de 10 CV, despreciar todas la pérdidas de energía, salvo las producidas en la turbina. Dibujar la línea de energía y la de presión dinámica.



Determinación de la velocidad en la salida y en el tubo

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0.100}{\frac{\pi}{4}\,0.10^2} = 12.74 \text{ m/s} \qquad \text{y} \qquad V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.100}{\frac{\pi}{4}\,0.20^2} = 3.18 \text{ m/s}$$

La potencia que el agua le suministra a la turbina es

$$P = \frac{Q\,\gamma\,H_T}{75} \qquad \Rightarrow \qquad H_T = \frac{75\,P}{1000\,Q} \qquad \Rightarrow \qquad H_T = \frac{75 \text{ x } 10}{1000 \text{ x } 0.100} = 7.50 \text{ m}$$

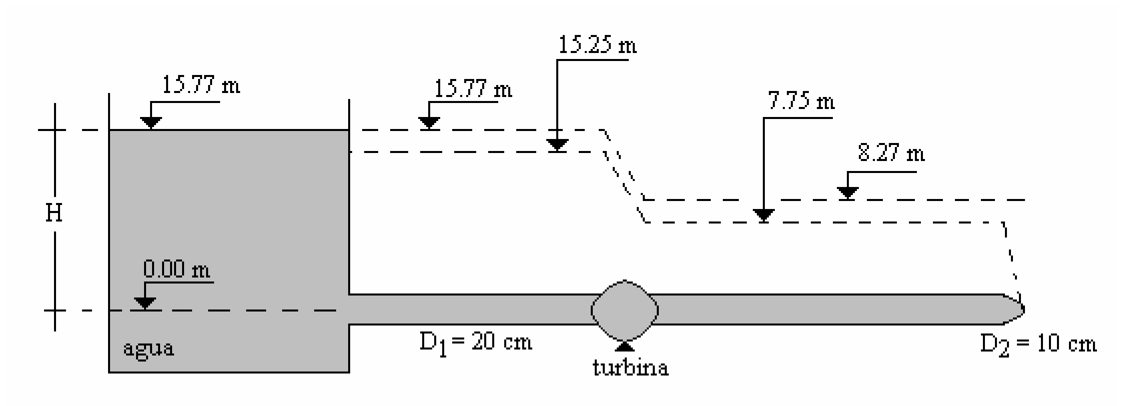
Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2 se tiene,

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+Z_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+Z_2+H_T$$

$$0.00+0.00+H=0.00+\frac{V_2^2}{2g}+0.00+H_T$$

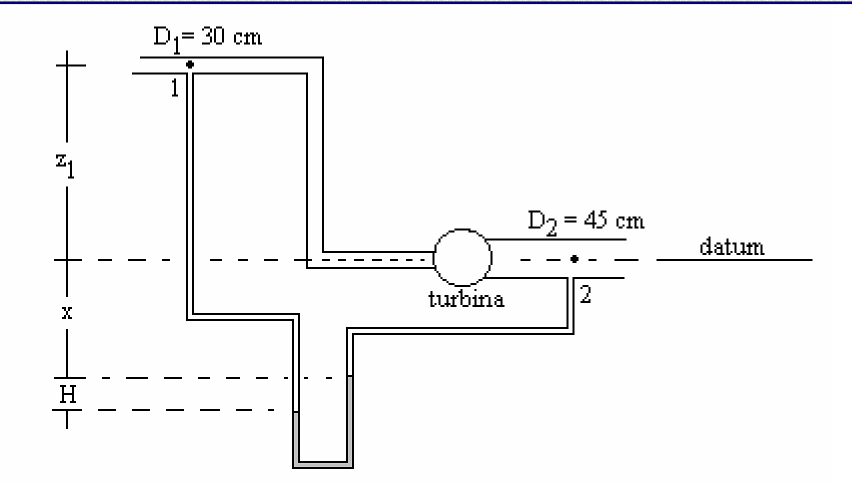
$$H=\frac{12.74^2}{19.62}+7.50$$

$$H=15.77\ \text{mts}$$



Problema 3.33

Calcular la diferencia de altura entre las columnas del mercurio de densidad, ρ = 1386 UTM/m^3 bajo las condiciones de un flujo permanente de agua de 550 lts/s y establecer si el lado derecho o el izquierdo de la columna de mercurio es el más alto. La potencia desarrollada por la turbina es de 75 CV.



Determinación de la velocidad en los puntos 1 y 2

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.550}{0.785\,(0.30)^2} = 7.78 \text{ m/s} \quad \text{y} \quad V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0.550}{0.785\,(0.45)^2} = 3.46 \text{ m/s}$$

La potencia que el agua le suministra a la turbina es

$$P = \frac{Q\,\gamma\,H_T}{75} \quad \Rightarrow \quad H_T = \frac{75\,P}{1000\,Q} \quad \Rightarrow \quad H_T = \frac{75 \text{ x } 75.00}{1000 \text{ x } 0.550} = 10.23 \text{ m}$$

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2 se tiene,

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + H_T$$

al despejar se obtiene

$$\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} = \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} - z_1 + H_T$$

Determinación de la diferencia de presiones a través del manómetro diferencial

$$p_1 + \gamma\, z_1 + \gamma\, x + \gamma\, H - \gamma_1\, H - \gamma\, x = p_2$$

$$p_1 - p_2 = -\gamma\, z_1 - \gamma\, H + \gamma_1\, H$$

$$\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} = -z_1 - H + \frac{\gamma_1}{\gamma}\, H$$

sustituyendo en la ecuación de Bernoulli se tiene

$$-z_1 - H + \frac{\gamma_1}{\gamma} H = \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} - z_1 + H_T$$

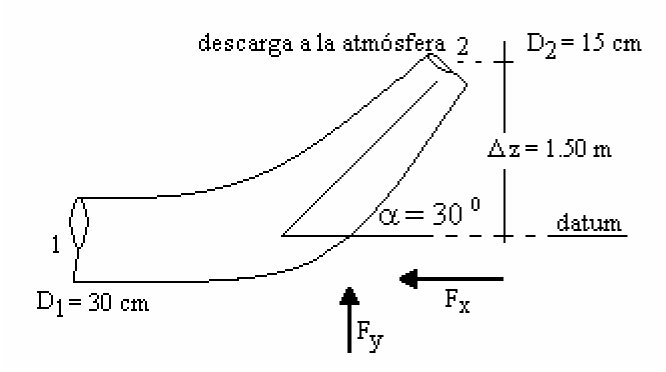
$$-H + \frac{13600}{1000}\, H = \frac{3.46^2}{19.62} - \frac{7.78^2}{19.62} + 10.23$$

$$12.60\ H = 0.61 - 3.09 + 10.23$$

$$H = 0.62 \text{ m}$$

La rama de la derecha es la más alta ya que el resultado del cálculo es positivo

Problema 3.34
Para el siguiente gráfico y despreciando las pérdidas de energía, determinar la fuerza horizontal y la vertical necesarias para mantener en reposo el codo reductor, si $D_1 = 30$ cm, $D_2 = 15$cm, $Q = 100$ l/s, $\rho = 102$ UTM/m^3 y $\forall = 95$ lts.



Determinación de las velocidades en las secciones 1 y 2

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.100}{0.785 \ x \ 0.30^2} = 1.42 \ \ m/s$$

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0.100}{0.785 \ x \ 0.15^2} = 5.66 \ \ m/s$$

Aplicando la ecuación de Bernoulli se obtiene la presión en la sección 1; así,

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2\,g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2\,g} + z_2$$

$$\frac{P_1}{1000} + \frac{1.42^2}{19.62} + 0.00 = 0.00 + \frac{5.66^2}{19.62} + 1.50$$

$$\frac{P_1}{1000} = 1.63 + 1.50 - 0.10 = 3.03 \text{ m} \qquad \Rightarrow \qquad P_1 = 3030 \ \ kg/m^2$$

Determinación de la fuerza horizontal, mediante la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento

$$\sum F_x = Q\,\rho\,(V_{2x} - V_{1x})$$

$$p_1 A_1 - p_2\,A_2 \cos\alpha - F_x = Q\,\rho\,(V_2 \cos\alpha - V_1)$$

$$3030 \frac{\pi}{4} 0.30^2 \;-0.00 \;-F_x \;=\; 0.100 \times 102 \,(5.66 \cos 30^0 - 1.42)$$

$$F_x \;=\; 178 \text{ kg}$$

Determinación de la fuerza vertical, mediante la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento

$$\sum F_z = Q\, \rho\, (V_{2z} \;- V_{1z})$$

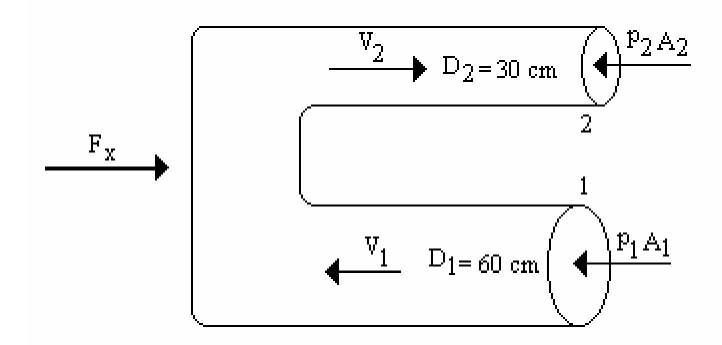
$$p_1 A_1 \text{ sen } 0^0 - p_2 A_2 \text{ sen } \alpha \;- W + F_z = Q\, \rho\, (V_2 \text{ sen } \alpha \;- V_1 \text{ sen } \alpha)$$

$$0.00 - 0.00 - 95.00 \times 10^{-3} \times 1000 + F_z = \; 0.100 \times 102\, (5.66 \text{ sen } 30^0 - 0)$$

$$F_z \;=\; 124 \text{ kg}$$

Problema 3.35

Por el codo reductor, horizontal, mostrado en la figura circula gasolina de densidad relativa 0.75. El diámetro aguas arriba es de 60 cm y aguas abajo de 30 cm. Si el caudal es de 450 lps, la presión aguas arriba de 1.50 kg/cm^2 y las pérdidas en el codo son $8(V_2 - V_1)^2 / 2g$. Determinar la fuerza F_x necesaria para mantenerlo en equilibrio.



Determinación de la velocidad en la sección 1 y 2

$$V_2 \;\frac{Q}{A_2} = \frac{0.450}{0.785\,(0.30)^2} = 6.32 \text{ m/s} \quad \text{y} \quad V_1 \;\frac{Q}{A_1} = \frac{0.450}{0.785\,(0.60)^2} = 1.59 \text{ m/s}$$

Aplicando la ecuación de Bernoulli se obtiene la presión en la sección 2; así,

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^{\;2}}{2\,g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^{\;2}}{19.62} + z_2 + \frac{8\,(V_2 - V_1)^2}{2\,g}$$

al despejar se obtiene

$$\frac{p_2}{\gamma} + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} - \frac{(V_2 - V_1)^2}{2g}$$

sustituyendo los valores numéricos se obtiene

$$\frac{p_2}{\gamma} = \frac{1.50 \times 10^4}{0.75 \times 1000} + \frac{(1.59)^2}{19.62} - \frac{(6.37)^2}{19.62} - \frac{8\,(6.37 - 1.59)^2}{19.62}$$

$$p_2 = 750 \times 874 = 6555 \text{ kg/m}^2$$

Determinación de la fuerza horizontal, mediante la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento

$$\sum F_x = Q\,\rho\,(V_{2x} - V_{1x})$$

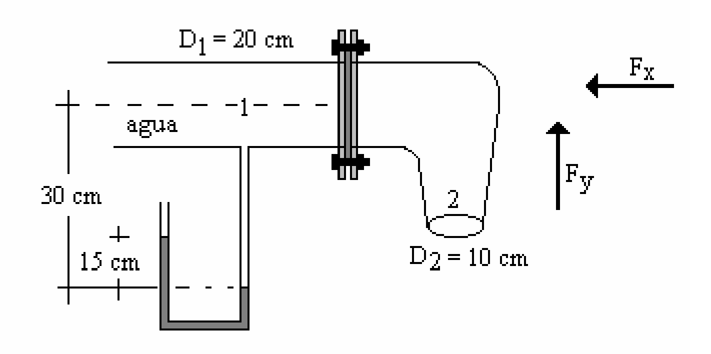
$$-p_1 A_1 - p_2 A_2 + F_x = Q\,\rho\,(V_2 - V_1)$$

$$-1.50 \times 10^4 \frac{\pi}{4} 0.60^2 - 6555 \frac{\pi}{4} 0.30^2 + F_x = 0.45 \times 0.75 \times 1.02\,(6.32 - (-1.59))$$

$$F_x - 4240 - 464 = 274$$

$$F_x = 4978 \text{ kg.}$$

Problema 3.36
Un codo reductor de 90^0, se encuentra ubicado en la salida de una tubería, que descarga a la atmósfera, según se indica en la figura. Si D_1 = 20 cm y D_2 = 10 cm. Determinar la fuerza que trata de desprender el codo y el ángulo de ésta respecto al eje x.
Nota: Despreciar el peso del agua, la diferencia de cotas y las pérdidas.



Determinación de la presión en el punto 1

$$p_1 + 1000 \times 0.30 - 13.6 \times 1000 \times 0.15 = 0$$
$$p_1 = 1740 \text{ kg/m}^2$$

Aplicando la ecuación de continuidad se obtiene

$$Q_1 = Q_2 \quad \Rightarrow \quad V_1\, A_1 = V_2\, A_2 \quad \Rightarrow \quad V_1 \frac{\pi}{4} D_1^{\,2} = V_2 \frac{\pi}{4} D_2^{\,2}$$

$$V_1 = V_2 \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad V_1 = V_2 \left(\frac{0.10}{0.20}\right)^2 = \frac{V_2}{4}$$

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre el punto 1 y 2 se obtiene

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^{\,2}}{2\,g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^{\,2}}{2\,g} + z_2$$

$$\frac{1740}{1000} + \frac{\left(\frac{V_2}{4}\right)^2}{2\,g} + 0.00 = 0.00 + \frac{V_2^{\,2}}{2\,g}$$

$$\frac{V_2^{\,2}}{2\,g} = \left(\frac{1}{16} - 1\right) = \frac{1740}{1000}$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{1740 \text{ x } 19.62}{1000\left(1 - \frac{1}{16}\right)}} = 6.03 \text{ m/s} \qquad \text{y} \qquad V_1 = \frac{6.03}{4} = 1.51 \text{ m/s}$$

El caudal es

$$Q = V_2\, A_2 = 6.03 \left(\frac{\pi}{4}\, 0.10^{\,2}\right) = 0.047 \text{ m}^3/\text{s}$$

Determinación de la fuerza horizontal, mediante la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento

$$\sum F_x = Q\, \rho\, (V_{2x} - V_{1x})$$

$$p_1\, A_1 - F_x = Q\, \rho\, (0.00 - V_1)$$

$$1740\, \frac{\pi}{4}\, 0.20^2 - F_x = 0.047 \text{ x } 102\, (0.00 - 1.51)$$

$$F_x = 61.88 \text{ kg}$$

Determinación de la fuerza vertical, mediante la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento

$$\sum F_z = Q\,\rho\,(V_{2z} - V_{1z})$$

$$F_z = Q\,\rho\,((-V_2) - 0.00)$$

$$F_z = 0.047 \times 102\,((-6.03) - 0.00)$$

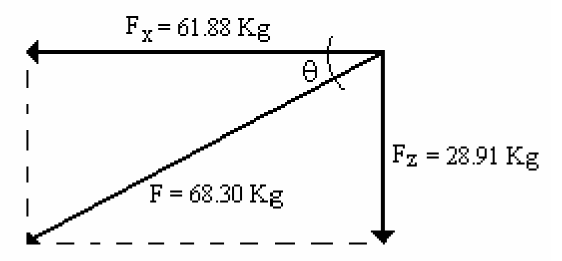
$$F_z = -\,28.91 \text{ kg}$$

El signo menos indica que F_z tiene sentido contrario al supuesto

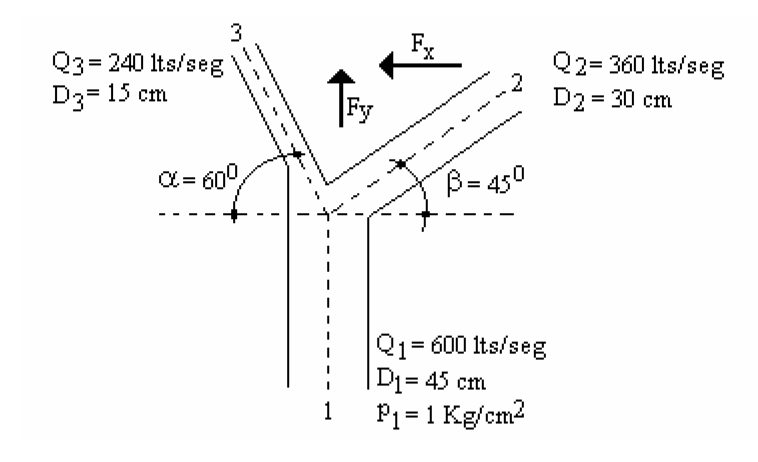
$$F = \sqrt{61.88^2 + 28.91^2} = 68.30 \text{ kg}$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{28.91}{61.88} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = 25.04^0$$

Diagrama de las fuerzas externas que es necesario aplicar al codo reductor para que se mantenga en equilibrio



Problema 3.37
Despreciando las pérdidas, determinar las componentes según x e y de la fuerza necesaria para mantener en su posición la bifurcación mostrada en la figura la cual se encuentra en el plano horizontal.



Determinación de las velocidades

$$V = \frac{Q}{A}$$

$$V_1 = \frac{0.60 \times 4 \times 10^4}{\pi\, 0.25^{\,2}} = 3.77 \text{ m/s}$$

$$V_2 = \frac{0.36 \times 4 \times 10^4}{\pi\, 900} = 5.09 \text{ m/s}$$

$$V_3 = \frac{0.36 \times 4 \times 10^4}{\pi\, 900} = 13.60 \text{ m/s}$$

Determinación de las presiones

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre 1 y 2 se tiene

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2\,g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2\,g} + z_2$$

$$p_2 = \left(\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2\,g} - \frac{V_2^2}{2\,g}\right)\gamma = \left(\frac{1 \times 10^{\,4}}{1000} + \frac{3.77^{\,2}}{19.62} - \frac{5.09^{\,2}}{19.62}\right)1000 = 9330 \text{ kg/m}^2$$

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre 1 y 3

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2\,g} + z_1 = \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2\,g} + z_3$$

$$p_3 = \left(\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2\,g} - \frac{V_3^2}{2\,g}\right)\gamma = \left(\frac{1 \times 10^{\,4}}{1000} + \frac{3.77^{\,2}}{19.62} - \frac{13.06^{\,2}}{19.62}\right)1000 = 1295 \text{ kg/m}^2$$

Determinación de la fuerza según el eje x, mediante la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento

$$\sum F_x = (Q\, \rho V_{salida}) - (Q\, \rho V_{entrada})$$

$$-\, p_2\, A_2 \cos\beta + p_3\, A_3 \cos\alpha - F_x = (\rho\, Q_2\, V_2 \cos\beta + \rho\, Q_3 (-V_3 \cos\alpha)) - (0.00)$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$-9390\ \frac{\pi}{4}\,0.30^{\,2}\cos 45^0 - 1295\ \frac{\pi}{4}\,0.15^{\,2}\cos 60^0\ - F_x =$$

$$= -\,(102 \times 0.360\ 5.09\ \cos 45^0 + 102 \times 0.240\ (-13.60\cos 60^0))$$

$F_x\ =\ 424.00\ \text{kg}$

Determinación de la fuerza según el eje y, mediante la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento

$$\sum F_y = (Q\ \rho V_{salida})\ - (Q\ \rho V_{entrada})$$

$$p_1 - p_2\,A_2\,\text{sen}\,\beta - p_3\,A_3\ \text{sen}\,\alpha + F_y\ =\ (\rho\,Q_2\,V_2\,\text{sen}\,\beta + \rho\,Q_3\,V_3\,\text{sen}\,\alpha)) - (\rho\,Q_1 V_1)$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

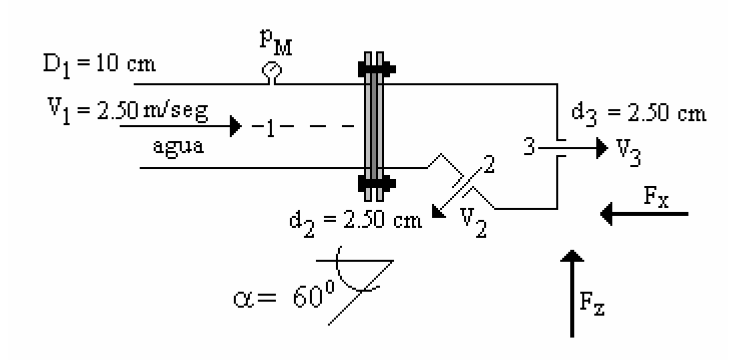
$$1 \times 10^{\,4}\ \frac{\pi}{4}\,0.45^{\,2}\ -\ 9330\ \frac{\pi}{4}\,0.30^{\,2}\,\text{sen}\,45^0\ - 1295\ \frac{\pi}{4}\,0.15^{\,2}\,\text{sen}\,60^0\ +\ F_y\ =$$

$$= (102 \times 0.360\ 5.09\ \text{sen}\,45^0 + 102 \times 0.240\ (-13.60\ \text{sen}\,60^0)) - (102 \times 0.600 \times 3.77)$$

$F_y\ =\ 908\ \text{kg}$

Problema 3.38

Dos chorros de agua de 2.5 cm de diámetro fluyen por la sección terminal de la tubería mostrada en la figura. La velocidad del agua en la tubería de 10 cm de diámetro es de 2.50 m/s. Si el manómetro marca una presión p_M. Determinar la fuerza que debe resistir la brida para que la tapa con los orificios permanezca en su posición. Despreciar el peso del líquido, la diferencia de cotas y las pérdidas.



Determinación de los caudales

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre 1 y 3

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2\,g} + z_1 = \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2\,g} + z_3$$

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre 1 y 2

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2\,g} + z_1 = \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2\,g} + z_3$$

igualando las expresiones anteriores

$$\frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2\,g} + z_2 = \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2\,g} + z_3$$

$$0.00 + \frac{V_2^2}{2\,g} + 0.00 = 0.00 + \frac{V_3^2}{2\,g} + 0.00 \qquad \Rightarrow \quad V_2 = V_3$$

Mediante la ecuación de continuidad se obtiene

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \qquad \Rightarrow \qquad V_1\,A_1 = V_2\,A_2 + V_3\,A_3$$

$$V_1\,\frac{\pi}{4}\,D_1^{\,2} = V_2\,\frac{\pi}{4}\,d_2^{\,2} + V_3\,\frac{\pi}{4}\,d_3^{\,2}$$

Al sustituir

$$2.50\,\frac{\pi}{4}\,0.10^2 = V_2\,\frac{\pi}{4}\,0.025^2 + V_2\,\frac{\pi}{4}\,0.025^2 \qquad \Rightarrow \qquad V_2 = 20.00\text{ m/s}$$

Los caudales son

$$Q_1 = 2.50\,\frac{\pi}{4}\,0.10^2 = 0.020\text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_2 = V_2\,\frac{\pi}{4}\,0.025^2 = 0.010\text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_3 = V_3\,\frac{\pi}{4}\,0.025^2 = 0.010\text{ m}^3/\text{s}$$

Determinación de la presión en 1 mediante la aplicando la ecuación de Bernoulli entre 1 y 3

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2\,g} + z_1 = \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2\,g} + z_3$$

sustituyendo los valores numéricos

$$\frac{p_1}{1000} + \frac{2.50^{\,2}}{19.62} + 0.00 = 0.00 + \frac{20.00^{\,2}}{19.62} + 0.00$$

$p_1 = 20070$ kg/m^2

Determinación de la fuerza según el eje x, mediante la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento

$$\sum F_x = (Q\,\rho V)_{salida} - (Q\,\rho V)_{entrada}$$

$$p_1\,A_1 - F_x = (\rho\,Q_2\,(-V_2)\cos\alpha + \rho\,Q_3\,V_3) - (\rho\,Q_1\,V_1)$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$20070\,\frac{\pi}{4}\,0.10^{\,2} - F_x = (102 \text{ x } 0.010\,(-20.00)\cos 60^0 + 102 \text{ x } 0.010 \text{ x } 20.00) - (102 \text{ x } 0.020 \text{ x } 2.50)$$

$F_x = 152.45$ kg

Determinación de la fuerza según el eje z, mediante la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento

$$\sum F_z = (Q\,\rho V)_{salida} - (Q\,\rho V)_{entrada}$$

$$0.00 + 0.00 + 0.00 + F_y = (\rho\,Q_2\,(-V_2)\,\text{sen}\,\alpha + 0.00) - (0.00)$$

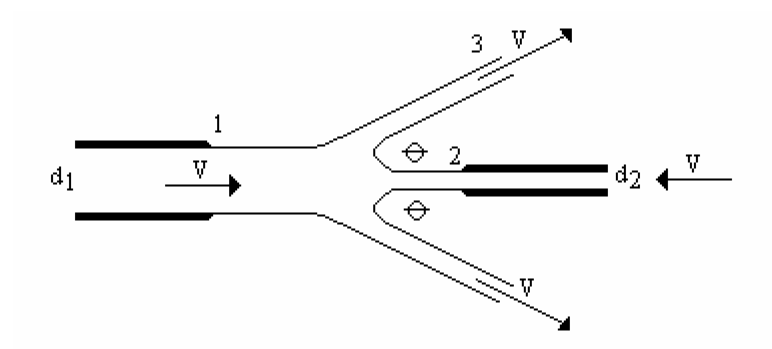
Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$F_z = (102 \text{ x } 0.010\,(-20.00)\,\text{sen}\,60^0 + 0.00) - (0.00)$$

$F_z = 17.67$ kg

$$F = \sqrt{152.45^{\,2} + 17.67^{\,2}} = 153.47 \text{ kg}$$

Problema 3.39
Dos chorros de velocidad V y diámetros de d_1 y d_2 chocan según se muestra en la figura. Calcular el ángulo de desviación θ en función de d_1 y d_2.
Nota: Despreciar las diferencias de cotas, las pérdidas y el peso del fluido.



Determinación de los caudales

$$Q_1 = \frac{\pi}{4} d_1^2\ V$$

$$Q_2 = \frac{\pi}{4} d_2^2\ V$$

$$Q_{entrada} = Q_1 + Q_2 = \frac{\pi}{4} d_1^2\ V + \frac{\pi}{4} d_2^2\ V = \frac{\pi}{4} V \left(d_1^2 + d_2^2\right)$$

$$Q_3 = Q_4 = \frac{1}{2} Q_{\ entrada} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} V \left(d_1^2 + d_2^2\right)$$

Aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento

$$\sum F_x = (Q\ \rho V)_{salida} - (Q\ \rho V)_{entrada}$$

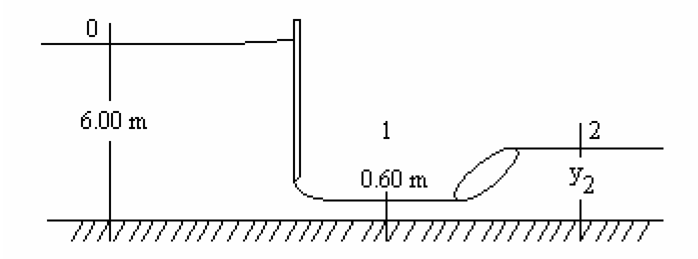
$$\sum F_x = 2\ (Q_3\ \rho\ V \cos\theta) - (Q_4\ \rho\ V + Q_4\ \rho\ (-V))$$

$$0 = 2\left[\frac{1}{2}\frac{\pi}{4} V \left(d_1^2 + d_2^2\right)\rho\ V \cos\theta\right] - \left[\frac{\pi}{4} V d_1^2\ \rho\ V + \frac{\pi}{4} V\ d_2^2 \rho\ (-V)\right]$$

$$\left(d_1^2 + d_2^2\right)\cos\theta = d_1^2 - d_2^2$$

$$\cos\theta = \frac{d_1^2 - d_2^2}{d_1^2 + d_2^2}$$

Problema 3.40
Suponiendo que no existen pérdidas a través de la compuerta que se muestra en la figura, determinar:
a) La altura Y_2.
b) La pérdida de energía en el resalto.
c) La fuerza sobre la compuerta por metro de ancho.
d) El caudal por metro de ancho.



mediante la ecuación de continuidad se tiene

$$V_0\,Y_0 = V_1\,Y_1 \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{V_0\,Y_0}{Y_1} \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{V_0\,6.00}{0.60} \quad \Rightarrow \quad V_1 = 10\,V_0$$

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre 0 y 1 se tiene

$$0.00 + \frac{V_0^2}{2\,g} + 6.00 = 0.00 + \frac{V_1^2}{2\,g} + 0.60$$

$$\frac{V_0^2}{2\,g} - \frac{(10\,V_0)^2}{2\,g} = -6.00 + 0.60$$

$$99.00\,\frac{V_0^2}{2\,g} = 5.40 \quad \Rightarrow V_0 = 1.03 \text{ m/s} \quad \text{y} \quad V_1 = 10.34 \text{ m/s}$$

Determinación del caudal

$$q = V_1\,A_1 = 10.34 \times 0.60 \times 1.00 = 6.21 \;\; \text{m}^3/\text{s/m}$$

Determinación de la fuerza mediante la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento

$$\sum F = Q\,\rho\,(V_1 - V_0)$$
$$F_1 - F_2 - F = Q\,\rho\,(V_1 - V_0)$$

$$\frac{1}{2}\ 1000 \times 6.00^2 \times 1.00 - \frac{1}{2}\ 1000 \times 6.00^2 \times 1.00 - F = 6.21 \times 102\ (10.34 - 1.03)$$

F = 11923 kg

Determinación de la altura y_2 mediante la aplicación general de la ecuación del resalto hidráulico

$$\frac{2\,y_2}{y_1} = -\ 1.00 + \sqrt{1 + 8\,F_1^{\,2}}$$

$$y_2 = \frac{0.60}{2}\left(-1.00 + \sqrt{1 + 8\left(\frac{10.34^{\,2}}{9.81 \times 0.60}\right)}\right)$$

y_2 = 3.33 m

Determinación de la velocidad en la sección de aguas abajo del resalto

$$V_2 = \frac{V\,y_1}{y_2} = \frac{10.34 \times 0.60}{3.33} = 1.86 \text{ m/s}$$

Determinación de la pérdida de energía en el resalto

Mediante la aplicación de Bernoulli se tiene

$$E_1 = E_2 + \Delta E$$

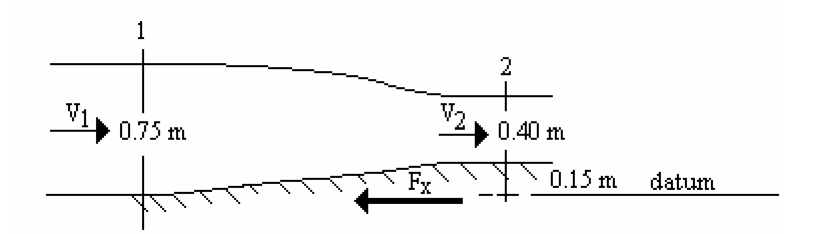
$$\frac{10.34^2}{19.62} + 0.60 = \frac{1.86^2}{19.62} + 3.33 + \Delta E$$

ΔE = 2.53 m

Otra forma puede ser

$$\Delta E = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4\,y_2\,y_1} = 2.53 \text{ m}$$

Problema 3.41
El flujo en un canal horizontal de 1.00 m de ancho se produce con una profundidad de 0.75 m. Se presenta una sobre elevación del fondo de 0.15 m y en la sección sobre elevada la profundidad es de 0.40 m. Determinar la fuerza horizontal que el fluido produce sobre el escalón.



Mediante la aplicación de la ecuación de continuidad se tiene

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow V_1\, y_1\, B = V_2\, y_2\, B \Rightarrow V_2 = \frac{y_1}{y_2} V_1 \Rightarrow V_2 = \frac{0.75}{0.40} V_1 \Rightarrow V_2 = 1.88\, V_1$$

Aplicación de la ecuación de Bernoulli entre punto 1 y 2

$$\frac{V_1^2}{2\,g} + 0.75 = \frac{V_2^2}{2\,g} + (0.15 + 0.40)$$

$$\frac{(1.88\, V_1)^2}{2\,g} - \frac{V_1^2}{2\,g} = 0.75 - 0.15 - 0.40$$

$$(3.53 - 1)\frac{V_1^2}{2\,g} = 0.20 \Rightarrow V_1 = \sqrt{\frac{0.20 \text{ x } 19.62}{2.53}} \Rightarrow V_1 = 1.25 \text{ m/s} \quad \text{y} \quad V_2 = 2.53 \text{ m/s}$$

Determinación del caudal

$$Q = V_1\, A_1 = 1.25 \text{ x } 0.75 \text{ x } 1.00 = 0.94 \text{ m}^3\text{/s}$$

Determinación de la fuerza mediante la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento

$$\sum F = Q\, \rho\, (V_2 - V_1)$$

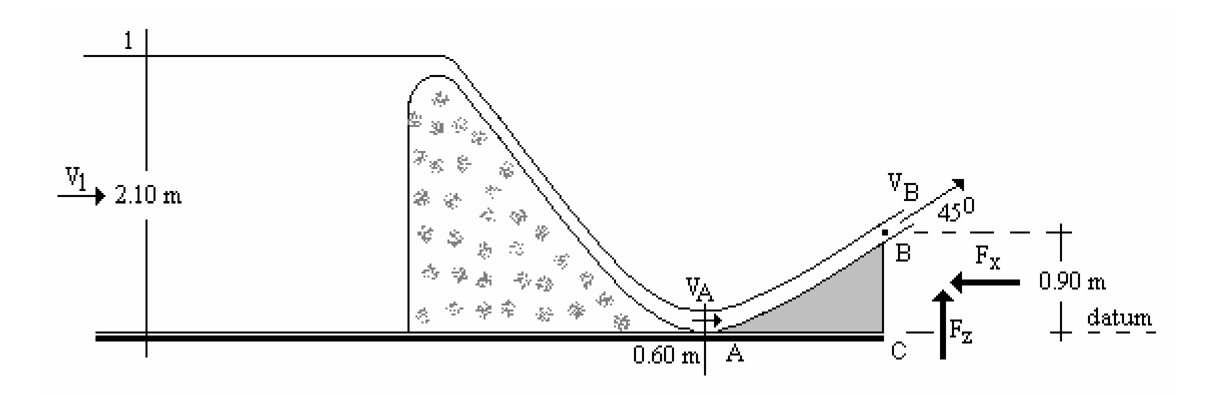
$$F_1 - F_2 - F_x = Q\, \rho\, (V_{2x} - V_{1x})$$

$$\frac{1}{2}\ 1000 \times 0.75^2 \times 1.00 - \frac{1}{2} 1000 \times 0.40^2 \times 1.00 - F_x = 0.94 \times 102\ (2.35 - 1.25)$$

$F_x = 95.78$ kg

Problema 3.42

Calcular la magnitud y dirección de Fx y Fz que ejerce el agua sobre la rampa ABC, de 2.00 m de ancho, mostrada en la figura. Suponga que el agua entre A y B pesa 600 kg y el fluido en B es un chorro libre.



Mediante la aplicación de la ecuación de continuidad se tiene

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow V_1\, y_1\, B = V_A\, y_A\, B \Rightarrow V_A = \frac{y_1}{y_A} V_1 \Rightarrow V_A = \frac{2.10}{0.60} V_1 \Rightarrow V_A = 3.50\ V_1$$

Aplicación de la ecuación de Bernoulli entre punto 1 y A

$$0.00 + \frac{V_1^2}{2\,g} + 2.10 = 0.00 + \frac{V_A^2}{2\,g} + 0.60$$

$$\frac{V_1^2}{2\,g} + 2.10 = \frac{(3.50\ V_1)^2}{2\,g} + 0.60$$

$$(3.50^2 - 1)\ \frac{V_1^2}{2\,g} = 2.10 - 0.60 \qquad \Rightarrow \qquad V_1 = \sqrt{\frac{(2.10 - 0.60)19.62}{3.50^2 - 1}} = 1.62 \text{ m/s}$$

$V_A = 3.50 \times 1.62 = 5.67$ m/s

Determinación del caudal

$Q = V_A \; A_A = 5.67 \times 0.60 \times 2.00 = 6.81 \;\; m^3/s$

Aplicación de la ecuación de Bernoulli entre punto A y B

$$0.00 + \frac{V_A^2}{2\,g} + 0.60 = \frac{V_B^2}{2\,g} + 0.90$$

$$\frac{5.67^2}{19.62} + 0.60 = \frac{V_B^2}{19.62} + 0.90$$

$$\frac{V_B^2}{2\,g} = 1.64 + 0.60 - 0.90 \qquad \Rightarrow \qquad V_B = 5.12 \text{ m/s}$$

Determinación de la fuerza horizontal mediante la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento

$$\sum F_x = Q\,\rho\,(V_{Bx} - V_{Ax})$$

$$F_1 - F_x = Q\,\rho\,(V_{Bx} - V_{Ax})$$

$$\frac{1}{2}\,1000 \times 0.60^2 \times 2.00 - F_x = 6.81 \times 102\,(5.12 \cos 45^0 - 5.67)$$

$F_x = 1782$ kg

Determinación de la fuerza vertical mediante la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento

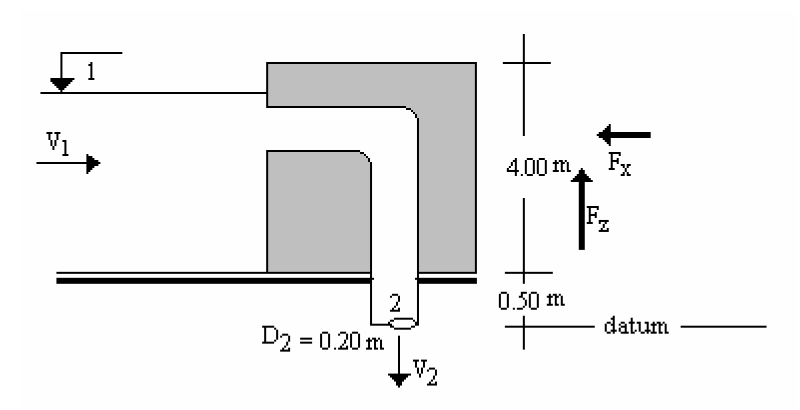
$$\sum F_z = Q\,\rho\,(V_{Bz} - V_{Az})$$

$$F_z - W = Q\,\rho\,(V_{Az} - V_{Az})$$

$$F_z - 600.00 = 6.81 \times 102\,(5.12 \text{ sen } 45^0 - 0.00)$$

$F_z = 3113$ kg

Problema 3.43
En la estructura de la figura de 1.00 m de ancho, determinar las fuerza horizontal y vertical que actúa sobre ella. Despreciar las pérdidas de energía y el peso propio.



Mediante la aplicación de la ecuación de continuidad se tiene

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow \; V_1\, y_1\, B = V_2\,\frac{\pi}{4}D_2^{\,2} \;\Rightarrow\; V_2 = \frac{y_1\,B}{\frac{\pi}{4}D_2^{\,2}}V_1 \;\Rightarrow\; V_2 = \frac{4.00 \text{ x } 1.00}{\frac{\pi}{4}\,0.20^2}V_1$$

$V_2 = 127 \; V_1$

Aplicación de la ecuación de Bernoulli entre punto 1 y 2

$$0.00 + \frac{V_1^2}{2\,g} + 4.50 = 0.00 + \frac{V_2^2}{2\,g} + 0.00$$

$$\frac{V_1^{\,2}}{2\,g} + 4.50 = \frac{(127\;V_1)^2}{2\,g}$$

$$(1 - 127^2)\,\frac{V_1^2}{2\,g} = -4.50 \qquad \Rightarrow \qquad V_1 = \sqrt{\frac{4.50 \text{ x } 19.62}{127^2 - 1}} = 0.074 \text{ m/s}$$

$V_2 = 127 \text{ x } 0.074 = 9.40 \text{ m/s}$

Determinación del caudal

$Q = V_1 \; A_1 = 0.074 \text{ x } 4.00 \text{ x } 1.00 = 0.296 \text{ m}^3/\text{s}$

Determinación de la fuerza horizontal mediante la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento

$\sum F_x = Q\,\rho\,(V_{2x} - V_{1x})$

$F_1 - F_x = Q\,\rho\,(V_{2x} - V_{1x})$

$$\frac{1}{2}\ 1000 \times 4.00^2 \times 1.00 - F_x = 0.296 \times 102\ (0.00 - 0.074)$$

$F_x = 8002$ kg

Determinación de la fuerza vertical mediante la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento

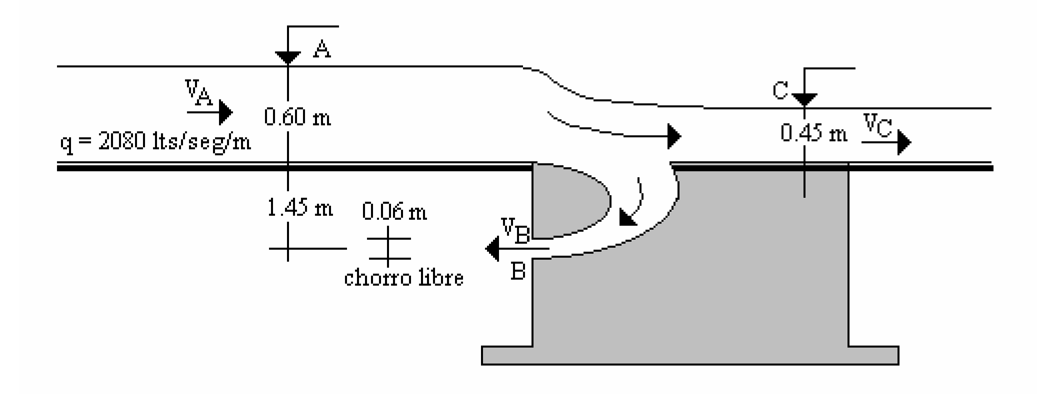
$$\sum F_z = Q\,\rho\,(V_{2z} - V_{1z})$$

$$F_z = Q\,\rho\,(V_{2z} - 0.00)$$

$$F_z = 0.296 \times 102\ ((-9.40) - 0.00)$$

$F_z = 284$ kg

Problema 3.44
La estructura hidráulica bi-dimensional, mostrada en la figura se usa para desviar parte del flujo de una canal abierto. Determinar la magnitud y dirección de la componente horizontal ejercida por el agua sobre la estructura, la cual tiene un ancho de 1.50 m.



Determinación de la velocidad de aproximación V_A

$$V_A = \frac{q}{A} = \frac{2080 \times 10^{-3}}{0.60} = 3.47 \text{ m/s}$$

Determinación del caudal unitario en la sección B mediante la aplicando la ecuación de Bernoulli entre A y B

$$\frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2\,g} + z_A = \frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2\,g} + z_B$$

$$\frac{V_B^2}{2\,g} = \frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2\,g} + z_A - \frac{p_B}{\gamma} - z_B$$

$$\frac{V_B^2}{2\,g} = 0.00 + \frac{3.47^2}{19.62} + \ (1.45 + 0.60) - 0.00 - 0.00$$

$$\frac{V_B^2}{2\,g} = 2.65 \qquad \Rightarrow \qquad V_B \ = \ \sqrt{2.65 \text{ x } 19.62} \ = \ 7.21 \ \text{ m/s}$$

El caudal unitario en la sección B es

$$q_B \ = \ 7.21 \text{ x } 0.06 \text{ x } 1.00 \ = \ 0.42 \ \ m^3/s/m$$

El caudal unitario en en la sección C es

$$q_C = q_A \ - q_B$$

$$q_C \ = \ 2.08 \ - 0.42 \ \ = \ 1.66 \ \ m^3/s/m$$

La velocidad en la sección C es

$$V_C \ = \ \frac{q_C}{A_C} = \frac{1.66}{0.45} \ = \ 3.69 \text{ m/s}$$

Determinación de la fuerza según el eje x, mediante la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento

$$\sum F_x = (Q\ \rho V)_{salida} \ - (Q\ \rho V)_{entrada}$$

$$F_A - F_C - F_x = (q_C\ \rho\ V_C \ + \ q_B\ \rho\ (-V_B)) - (q_A\ \rho\ V_A)$$

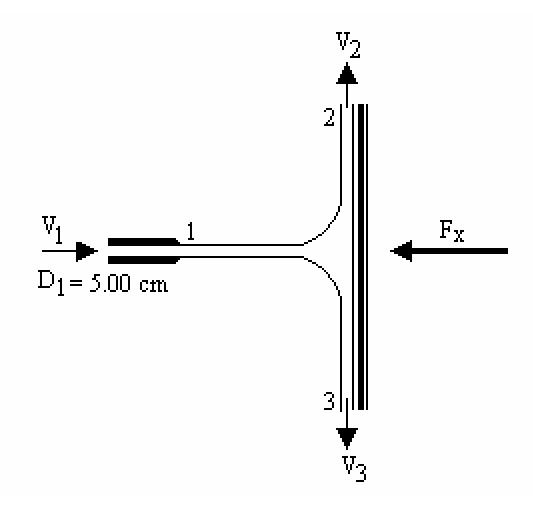
$$\frac{1}{2} \text{ x } 1000 \text{ x } 0.60^2 - \frac{1}{2}\ 1000 \text{ x } \ 0.45^2 - F_x \ = \ (1.66 \text{ x } 102 \text{ x } 3.69 - 0.42 \text{ x } 102 \text{ x } 7.21) \ - \ (2.08 \text{ x } 102 \text{ x } 3.47)$$

$F_x \ = \ 499$ kg/m de ancho

Como la estructura tiene 1.50 m de ancho; resulta,

$$F_t \ = \ 499 \text{ x } 1.50 \ = \ 749 \text{ kg}$$

Problema 3.45
Cuál es la fuerza Fx, requerida para mantener en su posición la placa mostrada en la figura, si existe un chorro es de aceite de densidad relativa 0.83, con una velocidad de aproximación V_1 = 12.00 m/s. Despreciar la diferencia de cotas.



Determinación de la fuerza según el eje x, mediante la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento

$$\sum F_x = (Q\,\rho V)_{salida} - (Q\,\rho V)_{entrada}$$

$$-F_x = (\rho\, Q_2\,(0.00) + \rho\, Q_3\,(0.00)) - (\rho\, Q_1\, V)$$

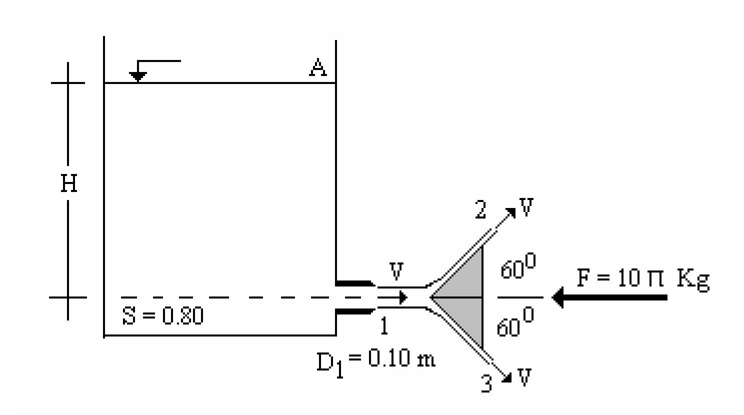
$$F_x = \rho\; Q_1\, V$$

$$F_x = \left(\frac{\gamma}{g}\right)\left(V\,\frac{\pi\, D^2}{4}\right) V$$

$$F_x = \left(\frac{1000}{9.81}\right)\left(12.00\,\frac{\pi\, 0.05^2}{4}\right) 12.00 \;\; = \; 24.00 \text{ kg}$$

$$F_x = 24.00 \text{ kg}$$

Problema 3.46
Calcular el valor de H, si la fuerza necesaria para mantener el cono en la posición indicada es F = 10 π kg, $\alpha = 60^0$, D = 0.10 m, S = 0.80



Aplicando la ecuación de Bernoulli entre 1 y 2 , y entre 1 y 3 se obtiene

$$V = V_1 = V_2 = V_3$$

Determinación de el caudal, Q_1, mediante la aplicando la ecuación de Bernoulli entre A y 1

$$\frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2\,g} + z_A = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2\,g} + z_1$$

$$0.00 + 0.00 + H = 0.00 + \frac{V_1^2}{2\,g} + 0.00$$

$$\frac{V_1^2}{2\,g} = H \quad \Rightarrow \quad V_1 = \sqrt{2\,g\,H} \quad \Rightarrow \quad Q = \left(\frac{\pi}{4}\right) 0.10^2 \sqrt{2\,g\,H}$$

El caudal en las secciones 2 y 3 son iguales y su valor es

$$Q_2 = Q_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right) 0.10^2 \sqrt{2\,g\,H}$$

Determinación de la altura H, mediante la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento, según el eje x

$$\sum F_x = (Q\,\rho V)_{salida} - (Q\,\rho V)_{entrada}$$

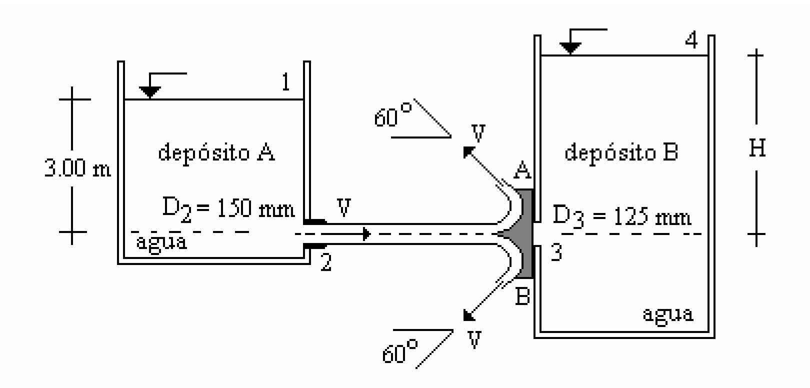
$$-10\,\pi = (\rho\,Q_2\,V\cos\alpha + \rho\,Q_2\,V\cos\alpha) - (\rho\,Q_1\,V)$$

$$-10\,\pi = 2\left(\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{4}\,0.10^2\sqrt{2\,g\,H}\,\frac{800}{g}\sqrt{2\,g\,H}\cos 60^0\right) - \left(\frac{\pi}{4}\,0.10^2\sqrt{2\,g\,H}\,\frac{800}{g}\sqrt{2\,g\,H}\right)$$

$$-10 = \left(\frac{1}{4}\,0.10^2 \text{ x } 2\,g\,H\,\frac{800}{g}\,\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}\,0.10^2 \text{ x } 2\,g\,H\,\frac{800}{g}\right)$$

$$-10 = 2\,H - 4\,H \quad \Rightarrow \quad H = 5.00 \text{ m}$$

Problema 3.47
Si la lámina AB cubre el orificio de 125 mm de diámetro. Determinar el máximo valor de H que puede mantenerse sin que el agua se escape del depósito B.



La determinación de la velocidad de salida V, del depósito A, se obtiene aplicando la ecuación de Bernoulli entre 1 y 2; así,

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2\,g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V^2}{2\,g} + z_2$$

$$0.00 + 0.00 + 3.00 = 0.00 + \frac{V^2}{2\,g} + 0.00 \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{2 \text{ x } 9.81 \text{ x } 3.00} = 7.67 \text{ m/s}$$

El caudal es

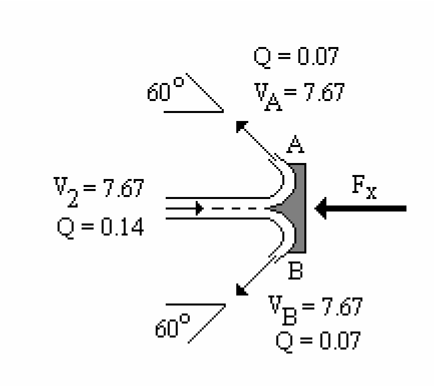
$$Q = V\,A = 7.67\left(\frac{\pi}{4}0.15^2\right) = 0.14 \text{ m}^3\text{/s}$$

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre 2 y A , y entre 2 y B se obtiene

$$V = V_2 = V_A = V_B$$

y el caudal $Q_A = Q_B = \frac{Q}{2} = \frac{0.14}{2} = 0.07 \text{ m}^3\text{/s}$

Determinación de la altura H mediante la aplicación de cantidad de movimiento



Determinación de la fuerza F_x, producida por el agua del depósito B, según el eje x, mediante la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento

$$\sum F_x = (Q\, \rho V)_{salida} - (Q\, \rho V)_{entrada}$$

$$-F_x = (Q_A\, \rho\, (-V) \cos 60^0 + Q_B\, \rho\, (-V) \cos 60^0) - (Q\, \rho\, V)$$

$$-F_x = 2\,(0.07 \times 102\,(-7.67) \cos 60^0) - (0.14 \times 102 \times 7.67)$$

$$F_x = 164.29 \text{ kg}$$

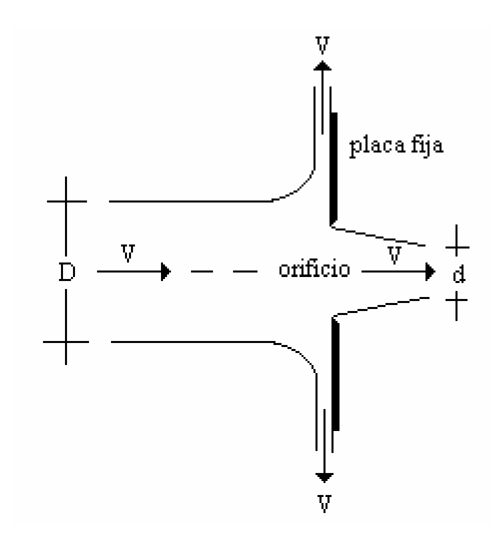
Determinación de la altura de agua, en el depósito B, necesaria para producir la fuerza determinada anteriormente

$$F = \gamma \bar{h} A$$

$$164.29 = 1000\; H\; \frac{\pi}{4}\, 0.125^2$$

$$H = 13.39 \text{ m}$$

Problema 3.48
Una placa vertical tiene un orifico de borde afilado en su centro. Un chorro de agua de velocidad V golpea la placa concéntricamente. Obtener una expresión para la fuerza externa necesaria para mantener fija la placa si el chorro que sale del orifico también tiene una velocidad V. Evalúe la fuerza para V = 5 m/s, D = 100 mm y d = 25 mm.



Aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento según el eje x

$$\sum F_x = (Q\,\rho V)_{salida\ \ x} - (Q\,\rho V)_{entrada\ \ x}$$

$$-F_x = V\,\frac{\pi}{4}\,d^2\,\rho\,V - V\,\frac{\pi}{4}\,D^2\,\rho\,V$$

$$F_x = V^2\,\frac{\pi}{4}\,\rho\,(\,D^2 - d^2\,)$$

Para los datos indicados se tiene

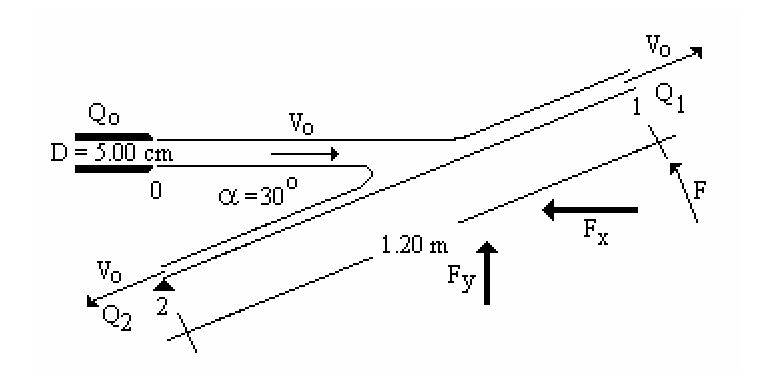
$$F_x = 5.00^2\,\frac{\pi}{4}\,102\,(\,0.10^2 - 0.025^2\,)$$

$$F_x = 18.77 \text{ kg}$$

Problema 3.49

Con referencia a la figura, un chorro de agua de 5 cm de diámetro choca con una compuerta de 1.20 m de largo que forma un ángulo de 30^0 con la horizontal. La velocidad del chorro es de 20 m/s e incide en el centro de gravedad de la compuerta. Despreciando el rozamiento determinar:

a) La distribución de caudales en función de Q_0
b) La fuerza horizontal sobre el placa.
c) La fuerza vertical sobre la placa.
d) La fuerza, F aplicada en el extremo opuesto a la articulación necesaria par mantener el equilibrio.



Aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento según el eje de la placa, suponiendo que esta es lisa.

$$\sum F_S = (Q\,\rho V)_{salida\ S} - (Q\,\rho V)_{entrada\ S}$$

$$0 = (Q_1\,\rho\,V_0 + Q_2\,\rho\,(-V_0)) - (Q_0\,\rho\,V_0 \cos\alpha)$$

$$Q_1 - Q_2 = Q_0 \cos\alpha$$

Mediante la ecuación de continuidad se tiene

$$Q_1 + Q_2 = Q_0 \qquad \Rightarrow \qquad Q_2 = Q_0 - Q_1$$

Al sustituir en la expresión obtenida mediante la ecuación de cantidad de movimiento

$$Q_1 - (Q_0 - Q_1) = Q_0 \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad 2\,Q_1 = Q_0\,(1 + \cos\alpha)$$

$$Q_1 = \frac{Q_0}{2}\,(1 + \cos\alpha) \qquad \text{y} \qquad Q_2 = \frac{Q_0}{2}\,(1 - \cos\alpha)$$

Los valores numéricos de los caudales son

$$Q_0 = V_0\,A_0 = 20.00\left(\frac{\pi}{4}\,0.05^2\right) = 0.039 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_1 = \frac{Q_0}{2}\,(1 + \cos\alpha) = \frac{0.039}{2}\,(1 + \cos 30^0) = 0.036 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_2 = \frac{Q_0}{2}\,(1 - \cos\alpha) = \frac{0.039}{2}\,(1 - \cos 30^0) = 0.003 \text{ m}^3/\text{s}$$

Determinación de la fuerza F_x, según el eje x, mediante la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento

$$\sum F_x = (Q\,\rho V)_{salida\ \ x} - (Q\,\rho V)_{entrada\ \ x}$$

$$-F_x = (Q_1\,\rho\,V_0 \cos\alpha\ + Q_2\,\rho\,(-V)\cos\alpha) - (Q_0\,\rho\,V_0)$$

$$-F_x = (0.036 \times 102 \times 20.00 \cos 30\ + 0.003 \times 102\,(-20.00)\cos 30) - (0.039 \times 102 \times 20.00)$$

$$F_x\ =\ 21.26\ \text{kg}$$

Determinación de la fuerza F_z, según el eje z, mediante la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento

$$\sum F_z = (Q\,\rho V)_{salida\ \ z} - (Q\,\rho V)_{entrada\ \ z}$$

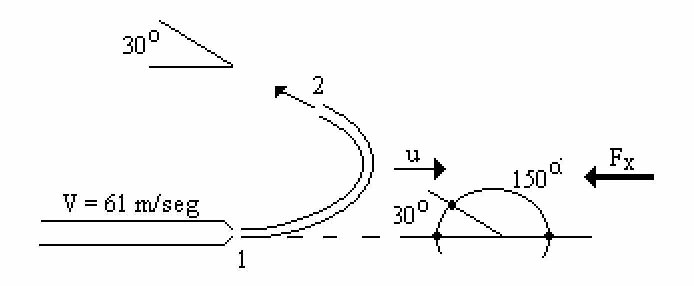
$$F_z = (Q_1\,\rho\,V_0\ \text{sen}\,\alpha\ + Q_2\,\rho\,(-V)\ \text{sen}\,\alpha) - (Q_0\,\rho\,(0.00))$$

$$F_z = (0.036 \times 102 \times 20.00\ \text{sen}\ 30\ + 0.003 \times 102\,(-20.00)\ \text{sen}\ 30) - (0.039 \times 102 \times (0.00))$$

$$F_z\ =\ 33.66\ \text{kg}$$

Problema 3.50

Una turbina de impulso que mide 1.829 m de diámetro se mueve por medio de un surtidor de agua de 5.08 cm de diámetro que tiene una velocidad de 61.00 m/s. Determinar la fuerza horizontal sobre las aspas y el caballaje desarrollado a 250 rpm. El ángulo de desviación de las aspas es de 150^0, según lo indicado en la figura.



Utilizando velocidades relativas se tiene,

Determinación de la velocidad tangencial, u

$$u = \frac{2\,\pi\, r\, n}{60} = \frac{\pi\, D\, n}{60} = \frac{\pi\, 1.829 \times 250}{60} = 24.00 \text{ m/s}$$

La velocidad relativa es, $V_r = V - u = 61.00 - 24.00 = 37.00$ m/s

Determinación de la fuerza F_x, según el eje x, mediante la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento; en este caso por ser una serie de alabes se utiliza el caudal total Q.

$$\sum F_x = Q\,\rho(\,V_{r\,2x} - V_{r\,1x})$$

$$-F_x = \left(61.00\left(\frac{\pi}{4}\,0.058^{\,2}\right)\right)102\left(-37.00 \text{ Cos } 30^{\,0} - 37\right) = 870 \text{ kg}$$

La potencia es

$$P_{CV} = \frac{F_x\ u}{75} = \frac{870.00 \times 24.00}{75} = 278 \text{ CV}$$

Utilizando velocidades absolutas se tiene,

velocidades en la sección sección de entrada y de salida

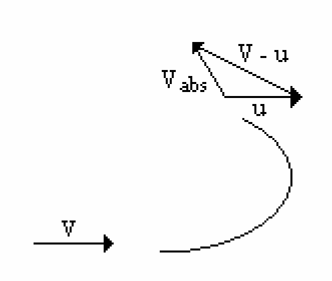
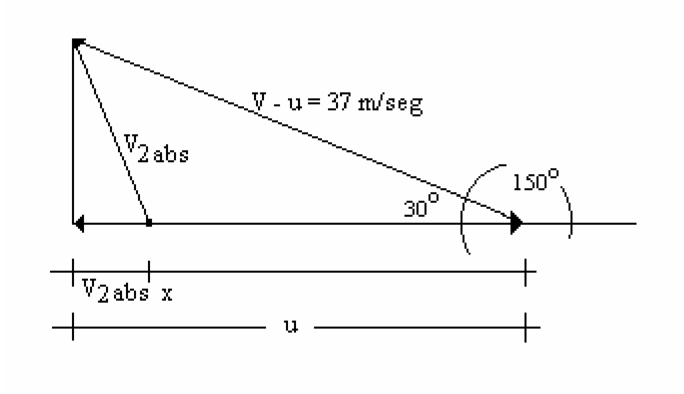


Diagrama de velocidades en la sección de salida



Velocidad absoluta de entrada, en la sección 1, según el eje x

$V_{abs\,1\;\;x} = 61.00$ m/s

Velocidad absoluta de salida, en la sección 2, según el eje x

$V_{abs\,2\;\;x} = (V - u)\cos 30^0 - u = (61.00 - 24.00)\cos 30^0 - 24.00 = 8.00$ m/s

Determinación de la fuerza F_x, según el eje x, mediante la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento; en este caso por ser una serie de alabes se utiliza el caudal total Q.

$$\sum F_x = Q\,\rho(\,V_{r\;2x} - V_{r\;1x})$$

$$-F_x = \left(61.00\left(\frac{\pi}{4}\,0.058^{\,2}\right)\right)102\left(-8.00 - 61.00\right) \;=\; 870 \text{ kg}$$

La potencia es

$$P_{CV} = \frac{F_x\;u}{75} = \frac{870.00 \text{ x } 24.00}{75} = 278 \text{ CV}$$

Problema 3.51
Un chorro de 7.50 cm de diámetro con una velocidad V = 35.00 m/s acciona contra un alabe que se mueve en la misma dirección con una velocidad u. El alabe deflecta el agua 150^0. Determinar la velocidad del alabe, u y la fuerza horizontal ejercida sobre éste si la velocidad absoluta es desviada 90^0.

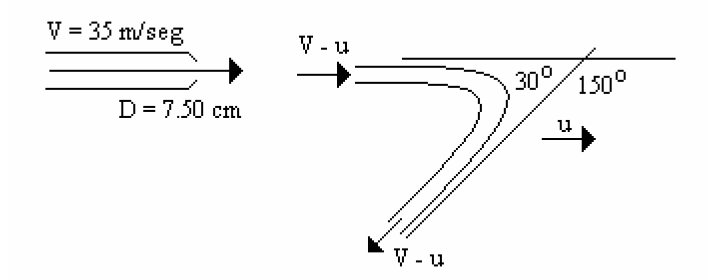
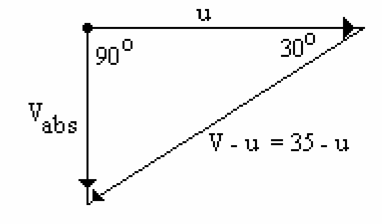
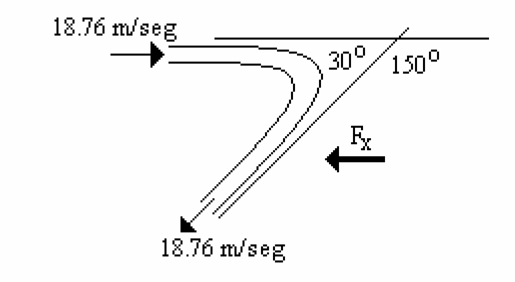


Diagrama de velocidades en la sección de salida



$$\cos 30^0 = \frac{u}{35.00 - u} \quad \Rightarrow \quad \cos 30^0 (35.00 - u) = u \quad \Rightarrow \quad u = 16.24 \text{ m/s}$$

La velocidad relativa es, $V_r = V - u = 35.00 - 16.24 = 18.76$ m/s

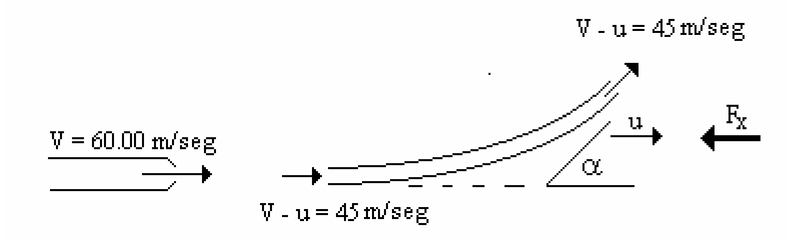


Determinación de la fuerza F_x, según el eje x, mediante la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento, en este caso por ser un alabe se utiliza el caudal relativo Q_r.

$$\sum F_x = Q_r\, \rho (V_{r\,2x} - V_{r\,1x})$$

$$-F_x = \left(18.76\left(\frac{\pi}{4}0.075^2\right)\right)102\left(-18.76 \operatorname{Cos} 30^0 - 18.76\right) = 296.00 \text{ kg}$$

Problema 3.52
Un chorro de agua de 5.00 cm de diámetro y V = 60.00 m/s, transfiere a una serie de alabes, una potencia de 180 CV. Los alabes se mueven a 15.00 m/s en la misma dirección del chorro. Determinar el ángulo de desviación de los alabes.



Determinación de la fuerza que reciben los alabes a través de la potencia

$$P_{CV} = \frac{F_x\ u}{75} \quad \Rightarrow \quad F_x = \frac{75\ P}{u} = \frac{75 \times 180}{15} = 900.00 \text{ kg}$$

La velocidad relativa es, $V_r = V - u = 60.00 - 15.00 = 45.00$ m/s

$$\sum F_x = Q\,\rho(\,V_{r\,2x} - V_{r\,1x})$$

$$-900.00 = \left(60.00\left(\frac{\pi}{4}\,0.05^{\,2}\right)\right)102\,(45.00\cos\alpha - 45.00)$$

$$-900.00 = \left(60.00\left(\frac{\pi}{4}\,0.05^{\,2}\right)\right)102 \text{ x } 45.00(\cos\alpha - 1)$$

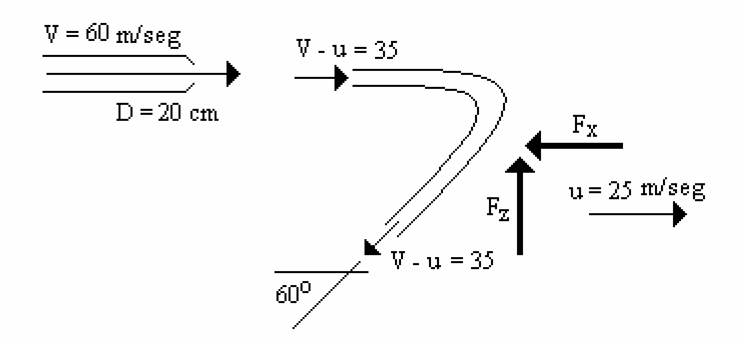
$$\cos\alpha - 1 = \frac{-900.00}{\frac{\pi}{4}\,0.05^{\,2} \text{ x } 60.00 \text{ x } 102 \text{ x } 45.00}$$

$$\alpha = 132.07^{\,0}$$

Problema 3.53

Los ángulos α y β de un alabe a la entrada y salida son 0^0 y 60^0, respectivamente. El chorro de 20 cm de diámetro, acciona tangencialmente. Determinar:

a) Fuerza horizontal y vertical transmitida al alabe único.
b) La potencia que él desarrolla.
c) La velocidad absoluta de salida y su ángulo, dibujar el diagrama vectorial de salida.



La velocidad relativa es, $V_r = V - u = 60.00 - 25.00 = 35.00$ m/s

Determinación de la fuerza F_x, según el eje x, mediante la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento

$$\sum F_x = Q\,\rho(\,V_{r\,2x} - V_{r\,1x})$$

$$-F_x = \left(35.00\left(\frac{\pi}{4}\,0.20^{2}\right)\right)102\left(-35.00\cos 60^{0} - 35.00\right)$$

$F_x = 5885.00$ kg

Determinación de la fuerza F_z, según el eje z, mediante la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento

$$\sum F_z = Q\,\rho(V_{salida\ z} - V_{entrada\ z})$$

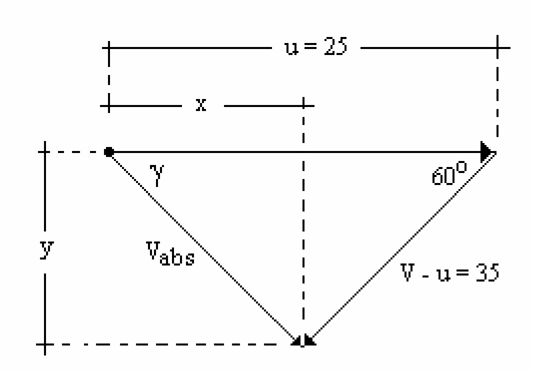
$$F_z = \left(35.00\,\frac{\pi}{4}\,0.20^{2}\right)102\left(-35.00\ \text{sen}\ 60^{0} - 0.00\right)$$

$F_z = -3398$ kg, el signo menos indica que F_z tiene sentido contrario al supuesto.

Determinación de la potencia

$$P_{CV} = \frac{F_x\ u}{75} = \frac{5885 \times 25.00}{75} = 1962\ \text{CV}$$

Diagrama de velocidades en la sección de salida



Determinación de la velocidad absoluta de salida y su ángulo de desviación

$x = 25.00 - 35.00\cos 60^0 = 7.50$ m/s

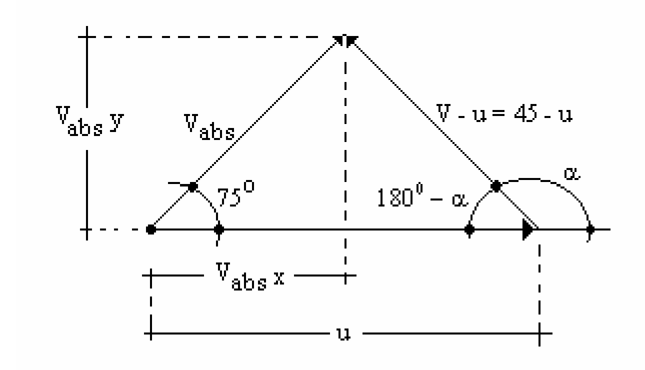
$y = 35.00\ \text{sen}\ 60^0 = 30.31$ m/s

$V_{abs} = \sqrt{7.50^{2} + 30.31^{2}} = 31.32$ m/s

$$\gamma = \text{arc tg}\ \frac{30.31}{7.50} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 76.10^0$$

Problema 3.54
Una serie de alabes se mueven en la misma dirección que un chorro de agua de 1" de diámetro y velocidad, V = 45.00m/s. Si la velocidad absoluta es desviada 75^0 encuentre la relación que debe existir entre la velocidad del alabe u y el ángulo α de éste, para que se satisfaga esta condición. Dibujar el diagrama de velocidades.

Diagrama de velocidades en la sección de salida



$$V_{abs\ y} = V_{abs}\ \text{sen}\ 75^0 = (45.00 - u)\ \text{sen}(180^0 - \alpha)$$

$$V_{abs\ x} = V_{abs}\ \cos 75^0 = u - (45.00 - u)\ \cos(180^0 - \alpha)$$

Dividiendo miembro a miembro las ecuaciones anteriores se tiene

$$\frac{\text{Sen } 75^0}{\text{Cos } 75^0} = \text{tg } 75^0 = \frac{(45.00 - u)\,\text{Sen}\,(180 - \alpha)}{u - (45.00 - u)\,\text{Cos}\,(180 - \alpha)}$$

Capítulo 4

ANALISIS DIMENSIONAL Y SEMEJANZA DINAMICA

Problema 4.1

Hacer una lista de las magnitudes más usuales en el flujo de los fluidos, indicando los símbolos y las dimensiones en M L T

Magnitud	Símbolo	Dimensiones
Longitud	L	L
Tiempo	T	T
Masa	M	M
Volumen	∀	L^3
Fuerza	F	$M L T^{-2}$
Velocidad	V	$L T^{-1}$
Aceleración	a	$L T^{-2}$
Area	A	L^2
Caudal	Q	$L^3 T^{-1}$
Presión	p	$M L^{-1} T^{-2}$
Gravedad	g	$L T^{-2}$
Densidad	ρ	$M L^{-3}$
Peso específico	γ	$M L^{-2} T^{-2}$
Viscosidad dinámica	μ	$M L^{-1} T^{-1}$
Viscosidad cinemática	ν	$L^2 T^{-1}$
Tensión superficial	σ	$M T^{-2}$
Modulo de elasticidad volumétrico	K	$M L^{-1} T^{-2}$

Problema 4.2

La Variación Δp de la presión en un líquido en reposo depende del peso específico y de la diferencia de altura Δz. Determinar por razonamiento dimensional la forma de la ley hidrostática de la variación de presión.

$\Delta p = f\ (\gamma,\ \Delta z)$

Magnitud	Símbolo	Dimensiones
Variación de presión	Δp	$M\,L^{-1}\,T^{-2}$
Peso específico	γ	$M\,L^{-2}\,T^{-2}$
Diferencia de altura	Δz	L

En este caso hay un número adimensional π_1

$$\pi_1 = \Delta p\ (\Delta z)^{x1}\ (\gamma)^{y1}$$

Dimensión de $\quad \pi_1 = (M\,L^{-1}\,T^{-2})\ (L)^{x1}\ (M\,L^{-2}\,T^{-2})^{y1} = M^0\,L^0\,T^0$

Los exponentes de cada dimensión deben ser los mismos en los dos miembros de esta ecuación; asi,

Para M $\Rightarrow$ $\quad + y_1 + 1 = 0$
Para L $\Rightarrow$ $\quad + x_1 - 2\,y_1 - 1 = 0$
Para T $\Rightarrow$ $\quad - 2\,y_1 - 2 = 0$

al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene

$x_1 = -1$, $\quad y_1 = -1$, $\quad$ por tanto,

$$\pi_1 = \frac{\Delta\ p}{\gamma\ \Delta z}$$

Problema 4.3
La fuerza de empuje E, sobre un cuerpo en un líquido, depende del volumen sumergido V, de la aceleración de la gravedad g y de la densidad del fluido ρ. Determinar la fuerza de la ecuación del empuje.

$E = f\,(V,\ \rho,\ g)$

Magnitud	Símbolo	Dimensiones
Empuje	E	$M\,L\,T^{-2}$
Volumen	$\forall$	L^3
Densidad	ρ	$M\,L^{-3}$
Gravedad	g	$L\,T^{-2}$
n = 4		m = 3

Las dimensiones fundamentales que intervienen son tres, por lo que con las cuatro magnitudes del problema podría formarse un parámetro adimensional π

$$\pi_1 = E\ (V)^{x1}\,(\rho)^{y1}\,(g)^{z1}$$

Dimensión de $\pi_1 = (M\,L\,T^{-2})\ (L^3)^{x1}\,(M\,L^{-3})^{y1}\,(L\,T^{-2})^{z1} = M^0\,L^0\,T^0$

Los exponentes de cada dimensión deben ser los mismos en los dos miembros de esta ecuación; asi,

Para M $\Rightarrow$ $+\ y_1 + 1 = 0$
Para L $\Rightarrow$ $+3\,x_1 - 3\,y_1 + z_1 + 1 = 0$
Para T $\Rightarrow$ $-2\,z_1 - 2 = 0$

al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene

$x_1 = -1$, $y_1 = -1$, $z_1 = -1$, por tanto,

$$\pi_1 = \frac{E}{\forall\,\rho\,g}$$

Problema 4.4
Una placa lisa de diámetro D, se encuentra a una distancia S de una superficie lisa fija, el espacio entre ambas superficies está lleno con un aceite de viscosidad μ. Si el momento torsor, T, para hacer girar la placa a una velocidad angular ω, es función de μ, ω, S, y D, mediante análisis dimensional. Determinar la forma de la ecuación.
Nota: Tome como variables a repetir S, μ, ω

$$T = f\,(T, \mu, \omega, S, D)$$

$$f_1\,(T, \mu, \omega, S, D) = 0$$

Magnitud	Símbolo	Dimensiones
Momento torsor	T	$M L^{2} T^{-2}$
Viscosidad	μ	$M L^{-1} T^{-1}$
Velocidad angular	ω	T^{-1}
Separación	S	L
Diámetro	D	L
n = 5		m = 3

Las dimensiones fundamentales que intervienen son tres, por lo que con las cinco magnitudes del problema podría formarse dos parámetro adimensional π.

$f_1(\pi_1; \pi_2) = 0$

$\pi_1 = T\ (S)^{x1}\ (\mu)^{y1}\ (\omega)^{z1}$

Dimensión de $\pi_1 = (M L^{2} T^{-2})\ (L)^{x1}\ (M L^{-1} T^{-1})^{y1}\ (T^{-1})^{z1} = M^{0} L^{0} T^{0}$

Los exponentes de cada dimensión deben ser los mismos en los dos miembros de esta ecuación; asi,

Para M $\Rightarrow$ $+ y_1 + 1 = 0$
Para L $\Rightarrow$ $+ x_1 - y_1 + {} + 2 = 0$
Para T $\Rightarrow$ $- y_1 - z_1 - 2 = 0$

al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene

$x_1 = -3$ $y_1 = -1$ $z_1 = -1$, por tanto,

$$\pi_1 = \frac{T}{S^3\ \mu\ \omega}\ .$$

$\pi_2 = D\ (S)^{x2}\ (\mu)^{y2}\ (\omega)^{z2}$

Dimensión de $\pi_2 = (L)\ (L)^{x2}\ (M L^{-1} T^{-1})^{y2}\ (T^{-1})^{z2} = M^{0} L^{0} T^{0}$

Los exponentes de cada dimensión deben ser los mismos en los dos miembros de esta ecuación; asi,

Para M $\Rightarrow$ $+ y_2 = 0$
Para L $\Rightarrow$ $x_2 - y_2 + 1 = 0$
Para T $\Rightarrow$ $- y_2 - z_2 = 0$

al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene

$x_2 = -1 \qquad y_2 = 0 \qquad z_2 = 0$, por tanto,

$$\pi_2 = \frac{D}{S}.$$

$$f_1\left(\frac{T}{S^3\,\mu\,\omega};\frac{D}{S}\right) = 0$$

$$T = S^3\,\mu\,\omega\;f_2\left(\frac{D}{S}\right)$$

Problema 4.5
Suponiendo que en un problema de flujo en una tubería lisa intervienen la magnitudes Q, D, Δh/L, ρ, μ, g, agruparlas en parámetros adimensionales siendo Q, ρ, μ las variables que se repiten.

$f_1 = (\,Q, D, \Delta h/L, \rho, \mu, g\,) = 0$

Magnitud	Símbolo	Dimensiones
Caudal	Q	$L^3\,T^{-1}$
Diámetro	D	L
Caída de presión/Longitud	Δh/L	Adimensional
Densidad	ρ	$M\,L^{-3}$
Viscosidad	μ	$M\,L^{-1}\,T^{-1}$
Gravedad	g	$L\,T^{-2}$
n = 6		m = 3

Las dimensiones fundamentales que intervienen son tres, por lo que con las seis magnitudes del problema podría formarse tres parámetro adimensional π

$f_1\,(\pi_1;\,\pi_2;\,\pi_3) = 0$

$\pi_1 = D\;(Q)^{x1}\,(\rho)^{y1}\,(\mu)^{z1}$

Dimensiones de $\quad \pi_1 = (\,L\,)\;(L^3\,T^{-1})^{x1}\;(M\,L^{-3})^{y1}\;(M\,L^{-1}\,T^{-1})^{z1} = M^0\;L^0\;T^0$

Los exponentes de cada dimensión deben ser los mismos en los dos miembros de esta ecuación; así,

Para M $\Rightarrow$ $+ \; y_1 \; + \; z_1 = 0$
Para L $\Rightarrow$ $+ \; 3 \; x_1 \; - \; 3 \; y_1 \; - \; z_1 + 1 = 0$
Para T $\Rightarrow$ $- \; x_1 \; - \; z_1 = 0$

al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene

$x_1 = -1$ $y_1 = -1$ $z_1 = 1$, por tanto,

$$\pi_1 = \frac{\mu \, D}{Q \, \rho} \quad .$$

$$\pi_2 = g \; (Q)^{x2} \; (\rho)^{y2} \; (\mu)^{z2}$$

Dimensiones de $\pi_2 = (\,L\,T^{-2}\,) \; (L^3\,T^{-1})^{x2} \; (M\,L^{-3})^{y2} \; (M\,L^{-1}\,T^{-1})^{z2} \; = \; M^{\,0}\,L^0\,T^{\,0}$

Los exponentes de cada dimensión deben ser los mismos en los dos miembros de esta ecuación; así,

Para M $\Rightarrow$ $+ \; y_2 \; + \; z_2 = 0$
Para L $\Rightarrow$ $+ \; 3 \; x_2 \; - \; 3 \; y_2 \; - \; z_2 + 1 = 0$
Para T $\Rightarrow$ $- \; x_2 \; - \; z_2 - 2 = 0$

al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene

$x_2 = 3$ $y_2 = 5$ $z_1 = 2$, por tanto,

$$\pi_2 = \frac{Q^{\,3}\,\rho^{\,5}\,g}{\mu^{\,5}} \quad .$$

$$\pi_3 = \frac{\Delta\,h}{L} \quad .$$

$$f_1\left(\frac{\mu\,D}{\rho\,Q}, \frac{Q^{\,3}\,\rho^{\,5}\,g}{\mu^{\,5}}, \frac{\Delta\,h}{L}\right) = 0$$

Problema 4.6
El par, T, desarrollado por una turbina depende del caudal Q, de la altura H, del peso específico γ, de la velocidad angular ω y del rendimiento e. Determinar la forma de la ecuación del par mediante análisis dimensional.
Nota: Tome como variables a repetir Q, H, γ.

$T = f(Q, H, \gamma, \omega, e)$

$f_1 (T, Q, H, \gamma, \omega, e) = 0$

Magnitud	Símbolo	Dimensiones
Par	T	$M L^2 T^{-2}$
Caudal	Q	$L^3 T^{-1}$
Altura	H	L
Peso específico	γ	$M L^{-2} T^{-2}$
Velocidad angular	ω	T^{-1}
Rendimiento	e	Adimensional
n = 6		m = 3

Las dimensiones fundamentales que intervienen son tres, por lo que con las seis magnitudes del problema podría formarse tres parámetro adimensional π

$f_1 (\pi_1; \pi_2; \pi_3) = 0$

$\pi_1 = e$. rendimiento

$\pi_2 = \omega (Q)^{x2} (H)^{y2} (\gamma)^{z2}$

Dimensiones de $\pi_2 = (T^{-1}) (L^3 T^{-1})^{x2} (L)^{y2} (ML^{-2} T^{-2})^{z2}$

Los exponentes de cada dimensión deben ser los mismos en los dos miembros de esta ecuación; así,

Para L $\Rightarrow$ $3x_2 + y_2 - 2z_2 = 0$
Para M $\Rightarrow$ $z_2 = 0$
Para T $\Rightarrow$ $- x_2 - 2z_2 - 1 = 0$

al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene

$x_2 = -1$ $y_2 = 3$; $z_2 = 0$, por tanto,

$$\pi_2 = \frac{\omega H^3}{Q} .$$

$\pi_3 = T (Q)^{x3} (H)^{y3} (\gamma)^{z3}$

Dimensiones de $\pi_3 = (M L^2 T^{-2}) (L^3 T^{-1})^{x3} (L)^{y3} (M L^{-2} T^{-2})^{z3} = M^0 L^0 T^0$

Los exponentes de cada dimensión deben ser los mismos en los dos miembros de esta ecuación; así,

$$\begin{array}{llcl}
\text{Para M} & \Rightarrow & + z_3 + 1 & = 0 \\
\text{Para L} & \Rightarrow & +3x_3 + y_3 - 2z_3 + 2 & = 0 \\
\text{Para T} & \Rightarrow & -x_3 - 2z_3 - 2 & = 0
\end{array}$$

al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene

$x_3 = 0$ $y_3 = -4$ $z_3 = -1$, por tanto,

$$\pi_3 = \frac{T}{\gamma H^4} \quad .$$

$$f_1\left(e \, ; \frac{\omega H^3}{Q} \, ; \frac{T}{\gamma H^4}\right) = 0$$

$$\frac{T}{\gamma H^4} = f_2\left(e \, ; \frac{\omega H^3}{Q}\right)$$

$$T = \gamma H^4 \; f_2\left(e \, ; \frac{\omega H^3}{Q}\right)$$

Problema 4.7
Un barco que tiene una longitud L, se mueve a una velocidad V, a través de un líquido de viscosidad μ, densidad ρ y tensión superficial σ. Encontrar por medio del análisis dimensional una expresión para la fuerza de arrastre F del barco, la cual se compara fácilmente con la ecuación estándar para el arrastre.
Nota: Tome como variables a repetir V, L, ρ.

Magnitud	Símbolo	Dimensiones
Fuerza de arrastre	F	$M L T^{-2}$
Longitud	L	L
Velocidad	V	$L T^{-1}$
Viscosidad	μ	$M L^{-1} T^{-1}$
Densidad	ρ	$M L^{-3}$
Tensión superficial	σ	$M T^{-2}$
N = 6		m = 3

$F = f(L, V, \mu, \rho, \sigma)$
$f_1 (F, L, V, \mu, \rho, \sigma) = 0$

Las dimensiones fundamentales que intervienen son tres, por lo que con las seis magnitudes del problema podría formarse tres parámetros adimensionales π

$f_1 (\pi_1; \pi_2; \pi_3) = 0$

$\pi_1 = \mu (V)^{x1} (L)^{y1} (\rho)^{z1}$

Dimensiones de $\pi_1 = (M L^{-1} T^{-1}) (L T^{-1})^{x1} (L)^{y1} (M L^{-3})^{z1} = M^0 L^0 T^0$

Los exponentes de cada dimensión deben ser los mismos en los dos miembros de esta ecuación; asi,

Para M $\Rightarrow$ $+ z_1 + 1 = 0$
Para L $\Rightarrow$ $+ x_1 + y_1 - 3 z_1 - 1 = 0$
Para T $\Rightarrow$ $- x_1 - 1 = 0$

al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene

$x_1 = -1$ $y_1 = -1$ $z_1 = -1$, por tanto,

$$\pi_1 = \frac{\mu}{V L \rho} .$$

el inverso de π_1, también es un número adimensional; así,

$$\pi_1 = \frac{V L \rho}{\mu}$$, denominado número de Reynolds, **R** .

$\pi_2 = \sigma (V)^{x2} (L)^{y2} (\rho)^{z2}$

Dimensiones de $\pi_2 = (M T^{-2}) (L T^{-1})^{x2} (L)^{y2} (M L^{-3})^{z2} = M^0 L^0 T^0$

Los exponentes de cada dimensión deben ser los mismos en los dos miembros de esta ecuación; así,

Para M $\Rightarrow$ $+ z_2 + 1 = 0$
Para L $\Rightarrow$ $+ x_2 + y_2 - 3 z_2 = 0$
Para T $\Rightarrow$ $- x_2 - 2 = 0$

al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene

$x_2 = -2$ $y_2 = -1$ $z_2 = -1$, por tanto,

$$\pi_2 = \frac{\sigma}{V^2\ L\ \rho}$$

el inverso de π_1, también es un número adimensional; así,

$$\pi_2 = \frac{V^2\ L\ \rho}{\sigma}$$, denominado número de Weber, **W**.

$$\pi_3 = F\ (V)^{x3}\ (L)^{y3}\ (\rho)^{z3}$$

$$\pi_3 = (M\ L\ T^{-2})\ (L\ T^{-1})^{x3}\ (L)^{y3}\ (M\ L^{-3})^{z3} = M^0\ L^0\ T^0$$

Los exponentes de cada dimensión deben ser los mismos en los dos miembros de esta ecuación; así,

Para M $\Rightarrow$ $+ z_3 + 1 = 0$

Para L $\Rightarrow$ $+ x_3 + y_3 - 3 z_3 + 1 = 0$

Para T $\Rightarrow$ $- x_3 - 2 = 0$

al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene

$x_3 = -2$ $y_3 = -2$ $z_3 = -1$, por tanto,

$$\pi_3 = \frac{F}{V^2\ L^2\ \rho}.$$

$$f_3\left(\mathbf{W};\ \mathbf{R};\ \frac{F}{V^2\ L^2\ \rho}\right) = 0$$

$$\frac{F}{V^2\ L^2\ \rho} = f_4\ (\mathbf{W};\ \mathbf{R})$$

$$F = \rho\ V^2\ L^2\ f_4\ (\mathbf{W};\ \mathbf{R})$$

Problema 4.8
En una canal abierto se coloca un vertedero triangular con ángulo ϕ por el que fluye el líquido represado por el vertedero. El caudal Q es una función de la elevación H de la superficie libre del líquido aguas arriba por encima del vértice del ángulo ϕ, depende de la gravedad y de la velocidad de aproximación, V_0 del líquido al vertedero. Determinar la forma de la ecuación para expresar el caudal.

$Q = f(H, g, V_0, \phi)$

$f_1(Q, H, g, V_0, \phi) = 0$

Magnitud	Símbolo	Dimensiones
Caudal	Q	$L^3\,T^{-1}$
Altura	H	L
Gravedad	g	$L\,T^{-2}$
Velocidad de aproximación	V_0	$L\,T^{-1}$
Angulo	ϕ	Adimensional
n = 5		m = 2

Las dimensiones fundamentales que intervienen son dos, por lo que con las cinco magnitudes del problema podría formarse tres parámetros adimensionales π

$f_1(\pi_1; \pi_2; \pi_3) = 0$

Supongamos que tomamos como variables a repetir g y H; entonces

$\pi_1 = \phi$.

$\pi_2 = Q\,(H)^{x2}\,(g)^{y2}$

Dimensiones de $\pi_2 = (L^3\,T^{-1})\,(L)^{x2}\,(L\,T^{-2})^{y2} = L^0\,T^0$

Los exponentes de cada dimensión deben ser los mismos en los dos miembros de esta ecuación; así,

Para L $\Rightarrow$ $x_2 + y_2 + 3 = 0$
Para T $\Rightarrow$ $-2y_2 - 1 = 0$

al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene

$x_2 = -5/2$ $y_2 = -1/2$, por tanto,

$$\pi_2 = \frac{Q}{g^{1/2}\ H^{5/2}} \ .$$

$$\pi_3 = \ V_0\ (H)^{x3}\ (g)^{y3}$$

Dimensiones de $\pi_3 = (L\ T^{-1})\ (L)^{x3}\ (L\ T^{-2})^{y3} = L^0\ T^0$

Los exponentes de cada dimensión deben ser los mismos en los dos miembros de esta ecuación; así,

Para L $\Rightarrow$ $x_3 + y_3 + 1 = 0$
Para T $\Rightarrow$ $-2\,y_3 - 1 = 0$

al resolver el sistema de ecuaciones es obtiene

$x_3 = -1/2$ $y_3 = -1/2$, por tanto,

$$\pi_3 = \frac{V_0}{g^{1/2}\ H^{1/2}} \ .$$

$$f_1\left(\frac{Q}{g^{1/2}\ H^{5/2}};\ \frac{V_0}{g^{1/2}\ H^{1/2}};\ \phi\right) = 0$$

$$Q = H^{5/2}\ \sqrt{g}\ f_2\left(\frac{V_0}{\sqrt{g\ H}};\ \phi\right)$$

Supongamos que tomamos como variables a repetir H y V_0 ; entonces

$\pi_1 = \phi$.

$\pi_2 = \ Q\ (H)^{x2}\ (V_0)^{y2}$

Dimensiones de $\pi_2 = (L^3\ T^{-1})\ (L)^{x2}\ (L\ T^{-1})^{y2} = L^0\ T^0$

Los exponentes de cada dimensión deben ser los mismos en los dos miembros de esta ecuación; asi,

Para L $\Rightarrow$ $x_2 + y_2 + 3 = 0$
Para T $\Rightarrow$ $-y_2 - 1 = 0$

al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene

$x_2 = -2$ $y_2 = -1$, por tanto,

$$\pi_2 = \frac{Q}{V_0\ H^2}\ .$$

$$\pi_3 = g\,(H)^{x3}\,(V_0)^{y3}$$

Dimensiones de $\pi_3 = (L\,T^{-2})\,(L)^{x3}\,(L\,T^{-1})^{y3} = L^0\,T^0$

Los exponentes de cada dimensión deben ser los mismos en los dos miembros de esta ecuación; asi,

Para L $\Rightarrow$ $x_3 + y_3 + 1 = 0$

Para T $\Rightarrow$ $-\ y_3 - 2 = 0$

al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene

$x_3 = 1$ $y_3 = -2$, por tanto,

$$\pi_3 = \frac{g\,H}{V_0^{\,2}}$$

la raíz cuadrada del inverso de π, también es un número adimensional; así,

$$\pi_3 = \frac{V_0}{\sqrt{g\,H}}\ .$$

$$f_1\left(\frac{Q}{V_0\ H^2};\frac{V_0}{\sqrt{g\,H}};\phi\right) = 0$$

$$Q = V_0\,H^2\,\sqrt{g}\,f_2\left(\frac{V_0}{\sqrt{g\,H}};\phi\right)$$

La última forma, en general, no es muy útil porque V_0 se puede despreciar con frecuencia en vertederos. Esto demuestra que un término de poca importancia no se debe tomar como variable de repetición.

Problema 4.9

La fuerza F sobre un proyectil a alta velocidad depende de la velocidad V del proyectil de la densidad ρ, de la velocidad del sonido C, del diámetro del proyectil D y de la viscosidad μ. Desarrollar una expresión para la resistencia.

Nota: Tome como variables a repetir V, D, ρ.

$F = f(V, \rho, C, D, \mu)$

$f_1(F, V, \rho, C, D, \mu) = 0$

Magnitud	Símbolo	Dimensiones
Fuerza	F	$M\,L\,T^{-2}$
Velocidad	V	$L\,T^{-1}$
Densidad	ρ	$M\,L^{-3}$
Velocidad del sonido	C	$L\,T^{-1}$
Diámetro	D	L
Viscosidad dinámica	μ	$M\,L^{-1}\,T^{-1}$
n = 3		m = 3

$f_1(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$

$\pi_1 = (F)(V)^{x1}(D)^{y1}(\rho)^{z1}$

Dimensiones de $\pi_1 = (M\,L\,T^{-2})(L\,T^{-1})^{x1}(L)^{y1}(ML^{-3})^{z1}$

Para L $\Rightarrow$ $x_1 + y_1 - 3z_1 + 1 = 0$
Para M $\Rightarrow$ $z_1 + 1 = 0$
Para T $\Rightarrow$ $-x_1 - 2 = 0$

al resolver el sistema de ecuaciones es obtiene

$x_1 = -2$; $y_1 = -2$; $z_1 = -1$, por tanto,

$$\pi_1 = \frac{F}{V^2\,D^2\,\rho}\ .$$

$\pi_2 = (C)(V)^{x2}(D)^{y2}(\rho)^{z2}$

Dimensiones de $\pi_2 = (LT^{-1})(L\,T^{-1})^{x2}(L)^{y2}(ML^{-3})^{z2}$

Los exponentes de cada dimensión deben ser los mismos en los dos miembros de esta ecuación; así,

Para M $\Rightarrow$ $z_2 = 0$
Para L $\Rightarrow$ $x_2 + y_2 - 3z_2 + 1 = 0$
Para T $\Rightarrow$ $-x_2 - 1 = 0$

al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene

$x_2 = -1$; $y_2 = 0$; $z_2 = 0$, por tanto,

$$\pi_2 = \frac{D^0 \ \rho^0 \ C}{V^1} = \frac{C}{V} = \mathbf{M}$$, denominado número de Mach.

$\pi_3 = \mu \, (V)^{x3} \, (D)^{y3} \, (\rho)^{z3}$

Dimensiones de $\pi_3 = (M \, L^{-1} \ T^{-1}) \, (L \, T^{-1})^{x3} \, (L)^{y3} \, (M \, L^{-3})^{z3}$

Los exponentes de cada dimensión deben ser los mismos en los dos miembros de esta ecuación; así,

Para M $\Rightarrow$ $z_3 + 1 = 0$

Para L $\Rightarrow$ $x_3 + y_3 - 3z_3 - 1 = 0$

Para T $\Rightarrow$ $-x_3 + 1 = 0$

al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene

$x_3 = -1$; $y_3 = -1$; $z_2 = -1$, por tanto,

$$\pi_3 = \frac{\mu}{V \, D \, \rho} = \frac{1}{\mathbf{R}}$$

el inverso de π_3, también es un número adimensional; así,

$\pi_3 = \mathbf{R}$, denominado número de Reynolds.

$$f_1\left(\frac{F}{V^2 \ D^2 \ \rho} \ ; \ \frac{C}{V} \ ; \ \frac{\mu}{V \ D \ \rho}\right) = 0$$

$$f_2\left(\frac{F}{V^2 \ D^2 \ \rho}; \ \mathbf{M}; \mathbf{R}\right) = 0$$

$$\frac{F}{V^2 \ D^2 \ \rho} = f_2 \ (\mathbf{M}; \ \mathbf{R})$$

$$F = V^2 \, D^2 \, \rho \ \ f_2 \ (\mathbf{M}; \ \mathbf{R})$$

Problema 4.10
Por una tubería que mide 5 cm de diámetro, fluye agua a 20^0 C y a una velocidad de 0.90 m/s. Que velocidad será necesaria para que una tubería de 15 cm de diámetro por la que fluye glicerina a 30^0 C sea dinámicamente semejante a la anterior.

Para que exista semejanza dinámica, los números de Reynolds en ambas tuberías deben ser iguales; es decir,

$$\mathbf{R_p = R_m}$$

$$\frac{V_p D_p}{\rho_p} = \frac{V_m\ D_m}{\rho_m}$$

$$V_m = V_p \frac{D_p}{D_m} \frac{\rho_m}{\rho_p}$$

En los gráficos correspondientes a las propiedades de los fluidos se encuentra

ρ_m (glicerina a 30° C) $= 2.00 \times 10^{-4}\ m^2/s$ ρ_p (agua a 20° C) $= 9.50 \times 10^{-7}\ m^2/s$

Sustituyendo se obtiene,

$$V_m = 0.90 \frac{0.50}{0.15} \frac{2.00 \times 10^{-4}}{9.50 \times 10^{-7}}$$

$$V_m = 63.16\ m/s$$

Problema 4.11
Las pérdidas en una bifurcación de una tubería de 1.20 m de diámetro, que transporta gas de densidad, $\rho = 4.20\ UTM/m^3$, viscosidad, $\mu = 0.002$ poise y velocidad, $v = 23$ m/s se quieren determinar mediante ensayo sobre modelo con agua a 21.1^0 C.
En el laboratorio se dispone de un caudal de 4500 l/min. A qué escala se deberá construir el modelo y como se convertirán los resultados de la pérdidas por fricción en el modelo con las del prototipo.

Para que exista semejanza dinámica, los números de Reynolds en ambas tuberías deben ser iguales; es decir,

$$\mathbf{R_p = R_m}$$

$$\frac{V_p\ D_p\ \rho_p}{\mu_p} = \frac{(Q_m)\,D_m\ \rho_m}{(A_m)\,\mu_m}$$

En las tablas correspondientes a las propiedades físicas del agua se obtiene, para 21.1° C

$\rho = 101.83$ UTM/m^3 y $\mu = 0.996 \times 10^{-4}$ kg s/m^2

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$\frac{23.00 \times 1.20 \times 4.20}{\left(\frac{0.002}{98}\right)} = \frac{\left(\frac{4500}{1000 \times 60}\right) D_m \times 101.83}{\left(\frac{\pi}{4} D_m^{\ 2}\right) \times 9.96 \times 10^{-4}}$$

Al despejar resulta

$D_m = 0.017$ m

así el factor de escala, λ es

$$\lambda = \frac{1.20}{0.017} = 70$$

para el prototipo se tiene,

$$hf_p = f_p\ \frac{L_p}{D_P}\ \frac{V_P^2}{2g}$$

y para el modelo

$$hf_m = f_m\ \frac{L_m}{D_m}\ \frac{V_m^2}{2g}$$

Al simplificar, se obtiene

$$\frac{hf_p}{hf_m} = \frac{f_p\ \frac{L_p}{D_p}\ \frac{V_p^{\ 2}}{2\ g}}{f_m\ \frac{L_m}{D_m}\ \frac{V_m^{\ 2}}{2\ g}}$$

dividiendo miembro a miembro ambas ecuaciones, considerando que la rugosidad relativa entre el prototipo y el modelo es la misma y el número de Reynolds entre ambos es igual, se obtiene en el diagrama de Moody que el coeficiente de fricción es el mismo en el modelo que en el prototipo, por lo tanto al simplificar se obtiene,

$$\frac{hf_p}{hf_m} = \left(\frac{V_p}{V_m}\right)^2$$

Problema 4.12
Un cuerpo anclado está sumergido en agua dulce, que fluye a una velocidad de 2.50 m/s, la resistencia medida sobre un modelo a escala 1:5, en un túnel aerodinámico en condiciones normales es de 2.00 kg. Si el experimento se realiza a 15.5° C y el peso específico del aire es de 1.22 kg/m^3. ¿Qué fuerza actúa sobre el prototipo si se dan las condiciones de semejanza dinámica?

Para que exista semejanza dinámica, los números de Reynolds en ambas tuberías deben ser iguales; es decir,

$$\mathbf{R_p = R_m}$$

$$\frac{V_m D_m}{\upsilon_m} = \frac{V_p\ D_p}{\upsilon_p}$$

$$V_m = V_p \frac{D_p}{D_m} \frac{\upsilon_m}{\upsilon_p} = V_p\ \lambda\ \frac{\rho_m}{\rho_p}$$

En las tablas correspondientes a las propiedades físicas del agua y el aire se obtiene, para 15.5° C

$$\text{agua} \begin{cases} \rho = 101.94\ UTM/m^3 \\ \upsilon = 1.12 \times 10^{-6}\ m^2/seg \end{cases} ; \qquad \text{aire} \qquad \upsilon = 1.50 \times 10^{-5}\ m^2/s$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$V_m = 2.50 \times 5 \times \frac{1.50 \times 10^{-5}}{1.12 \times 10^{-6}} = 167.41\ m/s$$

$$F_p = C_{D\,p}\ \rho_p\ A_p \frac{V_p^{\ 2}}{2} \qquad \text{y} \qquad F_m = C_{D\,m}\ \rho_m\ A_m \frac{V_m^{\ 2}}{2}$$

dividiendo miembro a miembro ambas ecuaciones y considerando que el número de Reynolds entre ambos es igual, se obtiene en el diagrama correspondiente del coeficiente de arrastre C_D que éste es el mismo en el modelo que en el prototipo, por lo tanto al simplificar se obtiene,

$$\frac{F_p}{F_m} = \lambda^2 \frac{\rho_p \, V_p^{\,2}}{\rho_m \, V_m^{\,2}}$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$\frac{F_p}{F_m} = 5^2 \frac{101.94 \text{ x } 2.50^2}{\left(\frac{1.22}{9.81}\right)167.41^2} = 4.56$$

$F_p = 2 \text{ x } 4.56 = 9.12$ kg

Problema 4.13
Un objeto con forma de torpedo de 900 mm de diámetro debe moverse en el aire a una velocidad de 60 m/s y la resistencia debe estimarse mediante experimentos a realizarse con un modelo a la mitad de la escala, en agua. Si la resistencia del modelo es de 116 kg y las propiedades de los fluidos son:

Para el agua $\mu = 1.00 \text{ x } 10^{-4}$ kg s/m^2 $\rho = 102$ UTM/m^3
Para el aire $\mu = 1.90 \text{ x } 10^{-6}$ kg s/m^2 $\rho = 0.122$ UTM/m^3

Determinar:

a) La velocidad del modelo.
b) La resistencia del prototipo.

Para que exista semejanza dinámica, los números de Reynolds en ambos casos deben ser iguales; es decir,

$\mathbf{R_m = R_p}$

$$\left(\frac{V\,D\,\rho}{\mu}\right)_m = \left(\frac{V\,D\,\rho}{\mu}\right)_p$$

Determinación de la velocidad del modelo

$$V_m = V_p \frac{D_p}{D_m} \frac{\rho_p}{\rho_m} \frac{\mu_m}{\mu_p}$$

$$V_m = 60 \times 2 \times \frac{0.122}{102} \frac{1.12 \times 10^{-4}}{1.90 \times 10^{-6}} = 8.46 \text{ m/s}$$

Determinación de la resistencia del prototipo

$$F_p = C_{D\,p}\ \rho_p\ A_p \frac{V_p^2}{2} \qquad \text{y} \qquad F_m = C_{D\,m}\ \rho_m\ A_m \frac{V_m^2}{2}$$

dividiendo miembro a miembro ambas ecuaciones y considerando que el número de Reynolds entre ambos es igual, se obtiene en el diagrama correspondiente del coeficiente de arrastre C_D que éste es el mismo en el modelo que en el prototipo, por lo tanto al simplificar se obtiene,

$$\frac{F_p}{F_m} = \lambda^2 \frac{\rho_p}{\rho_m} \frac{V_p^2}{V_m^2}$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$\frac{F_p}{F_m} = 2^2 \frac{0.122}{102} \frac{60.00^2}{8.46^2} = 0.24$$

$$F_p = 116 \times 0.24 = 27.92 \text{ kg}$$

Problema 4.14
El modelo de un aliviadero se construye a una escala de 1:36. Si en el modelo la velocidad y caudal desaguado son, respectivamente 0.40 m/s y 62 lts/s. ¿Cuáles son los valores correspondientes en el prototipo?.

Para que exista semejanza dinámica, en un flujo con superficie libre, el número de Froude en el modelo y en el prototipo deben ser iguales

$$\mathbf{F_m = F_p}$$

$$\frac{V_m}{\sqrt{g\, y_m}} = \frac{V_p}{\sqrt{g\, y_p}}$$

Al simplificar se obtiene

$$\frac{V_p}{V_m} = \lambda^{1/2}$$

Sustituyendo los valores numéricos se obtiene

$$V_p = V_m \ \lambda^{1/2} = 0.40 \ (36)^{1/2} = 2.40 \text{ m/s}$$

Relación de caudales entre el prototipo y el modelo son

$$\frac{Q_p}{Q_m} = \frac{V_p \ Ap}{V_m \ A_m} = \lambda^{1/2} \ \lambda = \lambda^{5/2}$$

Al despejar y sustituir los valores numéricos se tiene

$$Q_p = Q_m \ \lambda^{5/2} = 62 \ (36)^{5/2} = 483.000 \text{ lts/s} \quad \Rightarrow \quad 483 \ m^3/s$$

$$Q_p = 483.00 \ m^3/s$$

Problema 4.15

Se desea diseñar el aliviadero de una presa para que soporte un caudal máximo de 140 m^3/s, mediante mediciones en el modelo con un caudal de 28 lts/s. Determinar:

a) Cuál es la escala de longitudes o relación entre prototipo y modelo?
b) Si la presión medida en cierto punto del modelo es de 2 kg/cm^2, cuál será la presión que se generará en el prototipo.

Para que exista semejanza dinámica, en un flujo con superficie libre, el número de Froud en el modelo y en el prototipo deben ser iguales

$\mathbf{F}_m$ $\mathbf{F}_p$

$$\frac{V_p}{\sqrt{g \ y_p}} = \frac{V_m}{\sqrt{g \ y_m}}$$

$$\frac{V_p}{V_m} = \left(\frac{y_p}{y_m}\right)^{1/2} = \lambda^{1/2}$$

La relación entre los caudales del prototipo y del modelo indican

$$\frac{Q_p}{Q_m} = \frac{V_p \ Ap}{V_m \ A_m} = \lambda^{1/2} \ \lambda^2 = \lambda^{5/2}$$

$$\frac{Q_p}{Q_m} = \lambda^{5/2}$$

$$\lambda = \left(\frac{Q_p}{Q_m} \right)^{2/5}$$

Al sustituir los valores numéricos se tiene

$$\lambda = \left(\frac{140 \times 10^3}{28.00} \right)^{2/5}$$

$$\lambda = 30$$

La relación entre las presiones del prototipo y del modelo indican

$$\frac{P_p}{P_m} = \frac{\gamma \, h_p}{\gamma \, h_m} = \lambda$$

$$P_p = P_m \, \lambda$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$P_p = 2.00 \times 30.00 = 60.00 \ \text{kg/cm}^2$$

Problema 4.16
Qué fuerza por metro de longitud se ejercerá sobre un muro de contención de agua de mar, de peso específico 1050 kg/m^3, si un modelo a escala 1:36 de un metro de longitud ensayado con agua dulce de peso específico 1000 kg/m^3 experimenta una fuerza de 12 kg?

La relación de fuerzas, entre el modelo y el prototipo, para flujo con superficie libre es

$$\frac{F_p}{F_m} = \frac{\gamma_p \, h_p \, A_p}{\gamma_m \, h_m \, A_m} \quad \Rightarrow \quad F_p = F_m \, \frac{\gamma_p}{\gamma_m} \, \lambda^3$$

$$F_p = 12.00 \, \frac{1050}{1000} \, 36^3 = 587866 \ \text{kg,} \quad \text{correspondiente a 36 m de muro}$$

La fuerza por metro de longitud de muro es

$$F = \frac{587866}{36}$$

$$F = 16330 \ \text{kg por metro lineal de muro}$$

Problema 4.17
El modelo de un barco, de 0.90 m de longitud, se prueba en un tanque a una velocidad de 0.60 m/s. Determinar:
a) La velocidad en el prototipo de 60.00 m de longitud, corresponde a la del modelo.
b) Si se requiere una fuerza de 0.50 kg. para remolcar el modelo, qué fuerza correspondiente se requerirá en el prototipo.
c) La potencia que deberán desarrollar las máquinas del prototipo.
Nota: Considere únicamente fuerzas gravitacionales.

Para que exista semejanza dinámica, en un flujo con superficie libre, el número de Froud en el modelo y en el prototipo deben ser iguales

$$\mathbf{F}_m = \mathbf{F}_p$$

$$\frac{V_p}{\sqrt{g_P\ Y_p}} = \frac{V_m}{\sqrt{g_m\ Y_p}}$$

$$V_p = V_m\ \sqrt{\lambda}$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$V_p = 0.60\ \sqrt{66.66} = 4.89 \text{ m/s}$$

La relación de fuerzas, entre el modelo y el prototipo, para flujo con superficie libre es

$$\frac{F_p}{F_m} = \frac{\gamma_p\ h_p\ A_p}{\gamma_m\ h_m\ A_m} = \lambda^3$$

$$F_p = F_m\ \ \lambda^3$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$F_p = 0.50\ (66.66)^3 = 148133 \text{ kg}$$

La potencia es igual a la fuerza por la velocidad y expresada en caballos de vapor, CV, es

$$P_{p\,CV} = \frac{V_p\ F_p}{75} = \frac{4.89 \text{ x } 148133}{75}$$

$$P_p = 9658\ \text{CV}$$

Problema 4.18
A través de una acequia de 60 cm de ancho se va a construir un modelo de aliviadero a escala 1:25. El prototipo tiene 12.5 m de altura y se espera una altura de cara máxima de 1.50 m. Determinar:

a) La altura y la carga debe utilizarse en el modelo.
b) Si el caudal vertido sobre el modelo es de 20 lps con una carga de 6 cm. Cuál es el caudal por metro de prototipo.
c) Si en el modelo aparece un resalto hidráulico de 2.50 cm. Cuál es la altura que tendría el resalto en el prototipo.
d) Si la energía disipada en el resalto hidráulico de modelo es de 0.15 CV. Cuál sería la energía disipada en el prototipo.

Determinación de la altura del modelo y la carga hidráulica

Como el factor de escala es, por definición, $\lambda = \frac{L_p}{L_m}$,

entonces la altura se puede determinar como

$$\lambda = \frac{L_p}{L_m} \quad \Rightarrow \quad L_m = \frac{L_p}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad L_m = \frac{12.50}{25} = 0.50 \text{ m}$$

y la carga

$$C_m = \frac{1.50}{25} = 0.06 \text{ m}$$

Debido a que existe semejanza dinámica, el número de Froude en el modelo y en el prototipo deben ser iguales es decir

$$\mathbf{F_m} = \mathbf{F_p}$$

$$\frac{V_m}{\sqrt{g_m\ y_m}} = \frac{V_p}{\sqrt{g_p\ y_p}} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_m}{V_p} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

Las velocidades del modelo y del prototipo son

$$V_m = \frac{L_m}{t_m} \quad \text{y} \quad V_p = \frac{L_p}{t_p}$$

y la relación de velocidades, también puede expresarse como

$$\frac{V_m}{V_p} = \frac{L_m / t_m}{L_p / t_p} = \frac{L_m}{L_p}\frac{t_p}{t_m} = \frac{1}{\lambda}\frac{t_p}{t_m}$$

entonces

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\lambda}\frac{t_p}{t_m}$$ por lo tanto, $$\Rightarrow \frac{t_p}{t_m} = \sqrt{\lambda}$$

La relación de caudales es

$$\frac{Q_m}{Q_p} = \frac{L_m^{\ 3}/t_m}{L_p^{\ 3}/t_p} = \frac{L_m^{\ 3}}{L_p^{\ 3}}\frac{t_p}{t_m} = \lambda^3\frac{t_p}{t_m}$$

al sustituir las expresiones anteriores se tiene

$$\frac{Q_m}{Q_p} = \lambda^3\sqrt{\lambda} = \lambda^{5/2} \qquad \Rightarrow \qquad Q_p = Q_m\,\lambda^{5/2}$$

siendo del caudal

$Q_p = (20 \text{ x } 10^{-3})\,(25)^{5/2} = 62.50\ m^3/s$,

este caudal es para un ancho de modelo de 0.60 m lo que equivale en el prototipo, a una distancia de $L_p = L_m\,\lambda = 0.60 \text{ x } 25 = 15.00$ m

Por lo tanto el caudal unitario esperado en el prototipo es

$$q = \frac{Q}{B} = \frac{62.50}{15.00} = 4.17\,\frac{m^3/s}{m}$$

Determinación de la altura del resalto

$$\lambda = \frac{y_p}{y_m}, \qquad \Rightarrow \qquad y_p = \lambda\ y_m = 25 \text{ x } 0.025 = 0.625 \text{ m}$$

Las potencias del prototipo y del modelo son

$P_p = \gamma_p\ L_p^3\ V_p$ y $P_m = \gamma_m\ L_m^3\ V_m$

y la relación de estas es

$$\frac{P_p}{P_m} = \frac{\gamma_p\,L_p^{\ 3}\,V_p}{\gamma_m\,L_m^{\ 3}\,V_m} = \lambda^3\,\lambda^{1/2} = \lambda^{7/2}$$

Al sustituir los valores numéricos se tiene

$P_p = P_m\ \lambda^{7/2} = 0.15\,(25)^{7/2} = 11700$ CV

Capítulo 5

EFECTO DE LA VISCOSIDAD RESISTENCIA FLUIDA

Problema 5.1
Calcular la relación entre la velocidad máxima y la velocidad media para flujo laminar entre placas fijas.

La ecuación general para la velocidad instantánea, u, en flujo laminar entre placas es,

$$u = \frac{U\,y}{a} - \frac{1}{2\mu}\frac{d}{dl}(p + \gamma h)\left(a\,y - y^2\right)$$

Como la velocidad en la placa superior es cero, es decir, U = 0 y la velocidad máxima ocurre por simetría, en un punto equidistante entre ambas placas , o sea en $y = \frac{a}{2}$; entonces,

$$u_{máx} = -\frac{1}{2\mu}\frac{d(p + \gamma h)}{dl}\left(a\left(\frac{a}{2}\right) - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)$$

Al simplificar se obtiene

$$u_{máx} = -\frac{1}{8\mu}\frac{d}{dl}(p + \gamma h)a^2$$

La ecuación general para el caudal, entre dos placas, de un metro de ancho, en flujo laminar es,

$$Q = \frac{U\,a}{2} - \frac{1}{12\,\mu}\frac{d}{dl}(p + \gamma\ h)a^3$$

como la placa superior es fija, U = 0, entonces el caudal es,

$$Q = -\frac{1}{12\,\mu}\frac{d}{dl}(p + \gamma\ h)a^3$$

la velocidad media se obtiene al dividir el caudal entre el área; así,

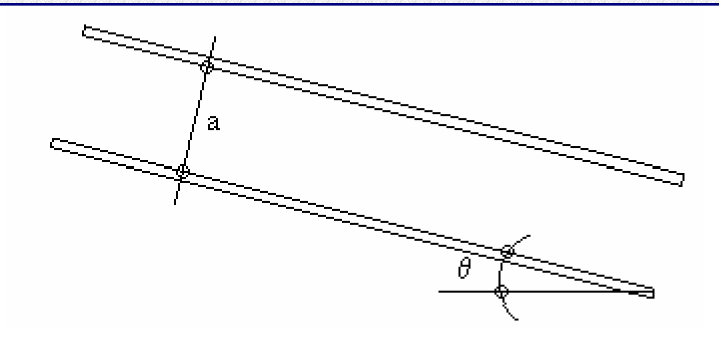
$$V_{media} = \frac{Q}{A} = \frac{-\dfrac{1}{12\mu}\dfrac{d}{dl}(p+\gamma\, h)a^3}{a} = -\frac{1}{12\mu}\frac{d}{dl}(p+\gamma\, h)a^2$$

La relación entre la velocidad máxima y la media es,

$$\frac{u_{max}}{V_{media}} = \frac{-\dfrac{1}{8\mu}\dfrac{d}{d\,l}(p+\gamma\, h)a^2}{-\dfrac{1}{12\mu}\dfrac{d}{dl}(p+\gamma\, h)a^2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{u_{max}}{V_{media}} = \frac{3}{2}$$

Problema 5.2
Para las placas paralelas y fijas que se muestran en la figura, determinar el ángulo de inclinación θ de manera que se produzca flujo laminar a presión constante.



La ecuación general para el caudal, entre dos placas, de un metro de ancho, en flujo laminar es,

$$Q = \frac{U\,a}{2} - \frac{1}{12\,\mu}\frac{d}{d\,l}(p+\gamma\ h)a^3$$

como la placa superior es fija, U = 0, entonces el caudal es,

$$Q = -\frac{1}{12\,\mu}\frac{d}{dl}(p+\gamma\ h)a^3$$

$$Q = -\frac{1}{12\,\mu}\left(\frac{d\,p}{d\,l} + \gamma\,\frac{d\,h}{d\,l}\right)a^3$$

en el presente caso el flujo es a presión constante, $\dfrac{dp}{dl} = 0$ y $\operatorname{sen}\theta = -\dfrac{dh}{dl}$,

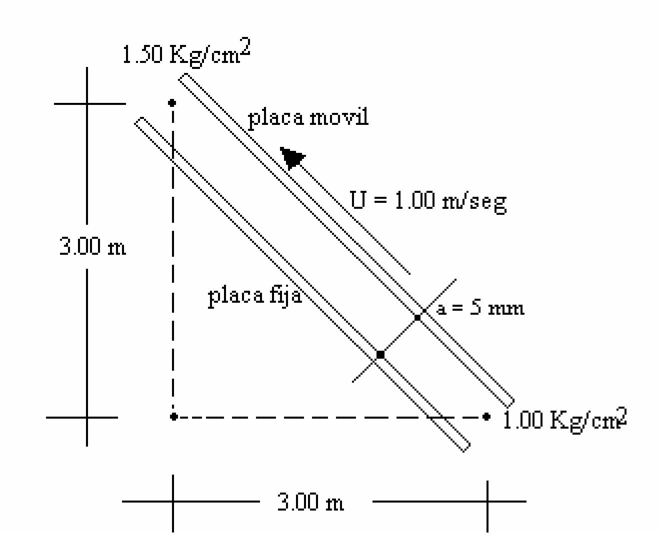
por tanto

$$Q = \frac{a^3}{12\mu}\gamma \operatorname{sen}\theta$$

de donde,

$$\theta = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{12\mu Q}{a^3 \gamma}\right)$$

Problema 5.3
Una placa se mueve en relación con la otra como se ilustra en la figura. Si la viscosidad μ es 0.80 poise y la densidad ρ es 93.5 UTM/m^3. Determinar:
a) La ecuación de la distribución de velocidades y su gráfico
b) La velocidad máxima
c) El caudal
d) La tensión de cortadura sobre la placa superior.



La ecuación general para la velocidad instantánea, u, en flujo laminar entre placas es,

$$u = \frac{U\,y}{a} - \frac{1}{2\mu}\frac{d}{dl}(p + \gamma h)(a\,y - y^2)$$

Determinación de la variación de la presión respecto a la longitud

En el punto superior

$p + \gamma h = 1.5 \times 10^4 + 93.5 \times 9.81 \times 3.00 = 17750$ Kg/m^2

En el punto inferior

$p + \gamma\, h = 1 \times 10^4 + 93.5 \times 9.81 \times 0.00 = 10000$ Kg/m^2

entonces la variación unitaria de presión es

$$\frac{d}{d1}(p + \gamma\, h) = \frac{10000 - 17750}{\sqrt{3.00^2 + 3.00^2}} = -1825 \text{Kg}/\text{m}^2/\text{m}$$

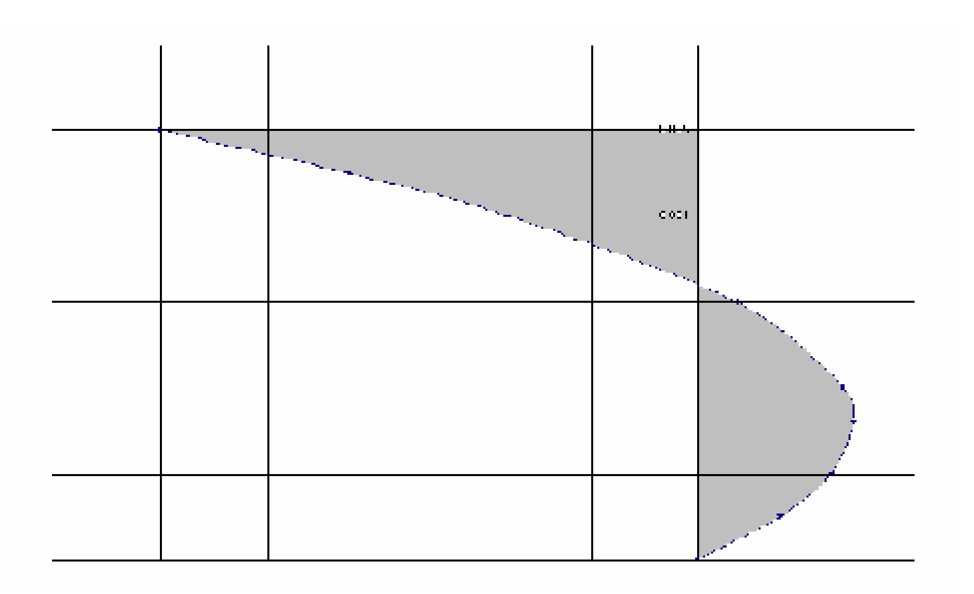
como la placa superior se mueve hacia la izquierda entonces U = – 1.00 m/seg y la separación entre la placas es $a = 5 \times 10^{-3}$ m, al sustituir se obtiene

$$u = \frac{-1.00\ y}{0.005} - \frac{1}{2(0.80/98)}(-1825)(0.005\ y - y^2)$$

Después de simplificar

$u = 359\, y - 111800\, y^2$

la gráfica es



La velocidad máxima se presenta donde $\frac{d\,u}{d\,y} = 0$

$$\frac{du}{dy} = 359 - 2 \times 111800\, y = 0$$

$$y = \frac{359}{2 \times 111800} = 0.0016\, \text{m} = 1.6\, \text{mm}$$

por lo tanto la velocidad máxima ocurre a 0.0016 m desde la placa fija, siendo la velocidad

$u_{máx} = 359\ (0.0016) - 111800\ (0.0016)^2 = 0.289$ m/s.

$u_{máx} = 0.289$ m/seg

Determinación del caudal

$$Q = \int_0^a u\, d\, y$$

$$Q = \int_0^{0.005} u\, d\, y = \int_0^{0.005} \left(359\, y - 111800\ \ y^2\right) d\ y$$

$$Q = \left[\frac{359}{2}\ y^2 - \frac{111800}{2}\ y^3\right]_0^{0.005}$$

$Q = -\ 0.17 \times 10^{-3}\, m^3 / seg$, por metro de ancho de placa (el signo menos indica que el caudal neto es hacia la izquierda).

La expresión general de la tensión de cortadura es,

$$\tau = \mu \frac{d\, u}{d\, y}$$

$$\tau = \mu \frac{d\, u}{d\, y} = \mu \left(359 - 2 \times 111800\, y\right)$$

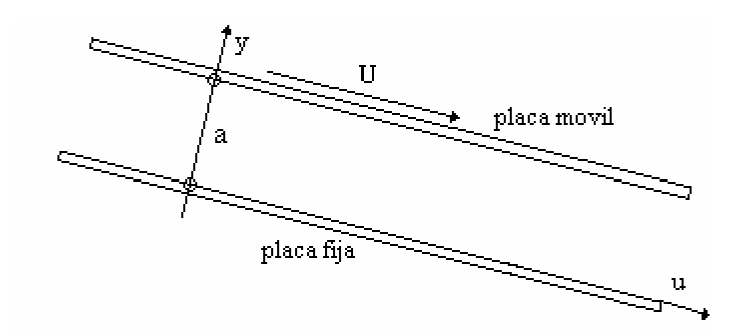
La tensión de cortadura en la placa superior ocurre para $y = 0.005$ m

$$\tau = \frac{0.80}{98}\left(359 - 2 \times 111800 \times 0.005\right)$$

$$\tau = -\ 6.19\, Kg / m^2$$

Problema 5.4

Determinar y graficar una expresión para calcular la tensión de cortadura, τ, entre dos placas inclinadas según se muestra en la figura, cuando existe un gradiente de presiones tal que el caudal sea nulo.



La expresión general de la tensión de cortadura es,

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

Determinación de la expresión de la velocidad, u, para las condiciones indicadas

La ecuación general para el caudal, entre dos placas, de un metro de ancho, en flujo laminar es,

$$Q = \frac{U\,a}{2} - \frac{1}{12\mu}\frac{d}{dl}(p + \gamma h)a^3 = 0$$

como en el presente caso el caudal es nulo se obtiene

$$\frac{d}{dl}(p + \gamma\, h) = \frac{U\,a}{2}\,\frac{12\mu}{a^3} = \frac{6\,U\,\mu}{a^2}$$

$$\frac{d\,\tau}{d\,y} = \frac{d}{d\,l}(p + \gamma\, h)$$

sustituyendo

$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{6\,U\,\mu}{a^2}$$

Al integrar se obtiene

$$\tau = \frac{6\,U\,\mu}{a^2}\,y + A$$

sustituyendo en la ecuación general del esfuerzo cortante se obtiene

$$\frac{6\,U\,\mu}{a^2}\,y + A = \mu \frac{du}{dy}$$

y al despejar

$$\frac{du}{dy} = \frac{6U}{a^2}y + \frac{A}{\mu}$$

Al integrar se obtiene

$$u = \frac{3U}{a^2}y^2 + \frac{A}{\mu}y + B$$

Condiciones de borde par el presente caso son

$$\begin{Bmatrix} u = 0 & \text{para} & y = 0 \\ u = U & \text{para} & y = a \end{Bmatrix}$$

entonces

$$A = -\frac{2U\mu}{a} \quad ; \quad B = 0$$

sustituyendo los valores de A y B en la expresión anterior se obtiene

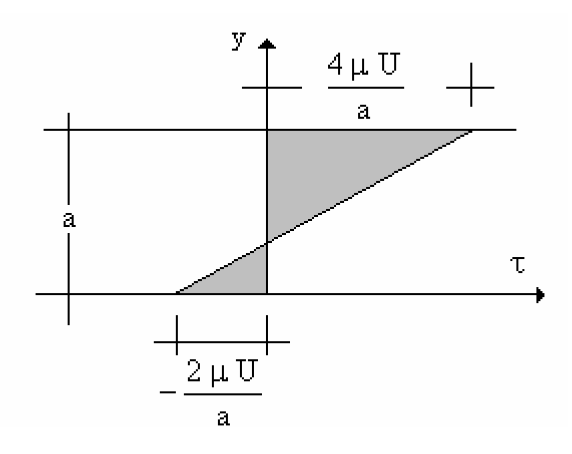
$$u = \frac{3U}{a^2}y^2 - \frac{2U}{a}y$$

Al sustituir resulta una variación lineal del esfuerzo cortante respecto a la altura

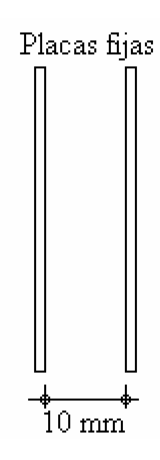
$$\tau = \mu\left(\frac{6U}{a^2}y - \frac{2U}{a}\right)$$

$$\begin{Bmatrix} \text{para} & y = 0 & \tau_{y=0} = -\frac{2\mu U}{a} \\ \text{para} & y = a & \tau_{y=a} = \frac{4\mu U}{a} \end{Bmatrix}$$

El gráfico correspondiente es



Problema 5.5
Entre dos placas planas fijas y verticales, separadas entre sí una distancia de 10 mm, fluye aceite de peso específico relativo 0.80 y viscosidad dinámica 19.6 x10^{-2} Kg seg/m^2. Si el caudal por metro de ancho es 0.01 m^3/s. Determinar:
a) El gradiente de presiones dp/dl.
b) La velocidad máxima.



Las condiciones del problema indican que U = 0 y $\frac{dh}{dl} = -1$

La ecuación general para el caudal, entre dos placas, de un metro de ancho, en flujo laminar es,

$$Q = \frac{U a}{2} - \frac{1}{12\mu}\frac{d}{dl}(p + \gamma h)\, a^3$$

la cual se puede escribir para el presente caso como

$$Q = -\frac{1}{12\mu}\left(\frac{dp}{dl} - \gamma\right) a^3$$

$$\frac{dp}{dl} = -\frac{12\mu Q}{a^3} + \gamma$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$\frac{dp}{dl} = -\frac{12 \text{ x } 19.6 \text{ x} 10^{-2} \text{ x } 0.01}{0.01^3} + 0.8 \text{ x } 1000$$

$$\frac{dp}{dl} = -22720 \ \frac{Kg/m^2}{m}$$

La ecuación general para la velocidad instantánea, u, en flujo laminar entre placas es,

$$u = \frac{U\,y}{a} - \frac{1}{2\mu}\frac{d}{dl}(p + \gamma h)(a\,y - y^2)$$

para el presente caso

$$u = -\frac{1}{2\mu}\left(\frac{dp}{dl} - \gamma\right)(a\,y - y^2)$$

la velocidad máxima ocurre en el punto equidistante entre ambas placas, o sea en $y = \frac{a}{2}$

$$u_{máx} = -\frac{1}{2\mu}\left(\frac{dp}{dl} - \gamma\right)\left(a\frac{a}{2} - \frac{a^2}{2^2}\right)$$

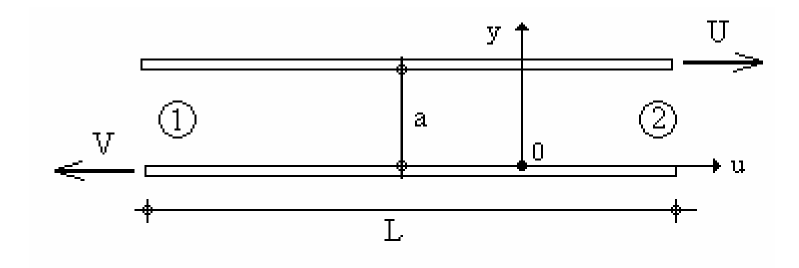
$$u_{máx} = -\frac{1}{2\mu}\left(\frac{dp}{dl} - \gamma\right)\left(\frac{a^2}{4}\right)$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$u_{máx} = -\frac{1}{2 \times 19.6 \times 10^{-2}}(-22720 - 800)\left(\frac{0.01^2}{4}\right)$$

$u_{máx} = 1.50$ m/seg

Problema 5.6
Deducir una expresión para el flujo que pasa una sección recta fija para flujo laminar entre las placas que se muestran en el esquema. Determinar la expresión del esfuerzo cortante.



$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{d}{dl}(p + \gamma h)$$

para el presente caso las placas son horizontales y la ecuación se puede escribir como

$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{dp}{dl}$$

Al integrar se obtiene

$$\tau = \frac{dp}{dl} y + A$$

La expresión general de la tensión de cortadura es,

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

Al igualar las dos expresiones anteriores se obtiene

$$\mu \frac{du}{dy} = \frac{dp}{dl} y + A$$

La expresión para la velocidad es

$$u = \int \left(\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dl} y + \frac{A}{\mu} \right) dy$$

Al integrar se obtiene

$$u = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dl} \frac{y^2}{2} + \frac{A}{\mu} y + B$$

Condiciones de borde para el presente caso

$$\begin{Bmatrix} u = -V & \text{para} & y = 0 \\ u = U & \text{para} & y = a \end{Bmatrix}$$

de donde

$$B = -V$$

$$A = \frac{(U + V)}{a} \mu - \frac{dp}{dl} \frac{a}{2}$$

sustituyendo los valores de A y B en la expresión anterior se obtiene

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dl}\left(y^2 - a\,y\right) + \frac{y}{a}\left(U + V\right) - V$$

Determinación del caudal

$$Q = \int_0^a u\,dy$$

$$Q = \int_0^a \left[\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dl}\left(y^2 - a\,y\right) + \frac{y}{a}\left(U + V\right) - V\right]dy$$

$$Q = -\frac{1}{12\mu}\frac{dp}{dl}a^3 + \left(U - V\right)\frac{a}{2}$$

Determinación de la tensión de cortadura

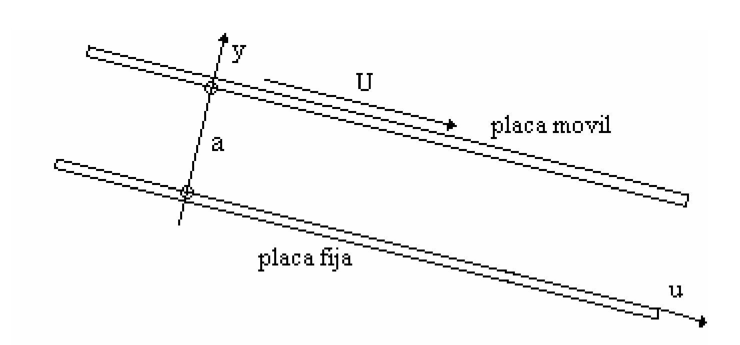
$$\tau = \frac{dp}{dl}y + A$$

$$\tau = \frac{dp}{dl}y + \left(\frac{U + V}{a}\mu - \frac{dp}{dl}\frac{a}{2}\right)$$

$$\tau = \frac{dp}{dl}\left(y - \frac{a}{2}\right) + \left(U + V\right)\frac{\mu}{a}$$

Problema 5.7

Hallar la expresión de d (p + γ h)/dl tal que τ sea cero en la placa fija. ¿Cuál es el caudal en este caso?.



$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{d}{dl}(p + \gamma h)$$

$$\tau = \frac{d}{dl}(p + \gamma h)y + A$$

La condición de borde es

$$\tau = 0 \quad ; \quad y = 0 \qquad \Rightarrow \quad A = 0$$

Al sustituir se obtiene

$$\tau = \frac{d}{dl}(p + \gamma h)y$$

La expresión general de la tensión de cortadura es,

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

igualando la expresiones anteriores e integrando se obtiene

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{d}{dl}(p + \gamma h)y^2$$

La condición de borde indica que para y = a , u = U ; entonces,

$$U = \frac{1}{2\mu}\frac{d}{dl}(p + \gamma h)a^2$$

de donde

$$\frac{d}{dl}(p + \gamma h) = \frac{2\mu U}{a^2}.$$

Determinación del caudal

$$Q = \int_0^a u\, dy$$

$$Q = \int_0^a \left[\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dl}(p + \gamma h)y^2\right]dy$$

$$Q = \frac{1}{6\mu}\frac{d}{dl}(p + \gamma\, h)\, a^3$$

sustituyendo el valor de d(p + γ h)/dl en la expresión del caudal se obtiene

$$Q = \frac{1}{6\mu}\frac{2\mu U}{a^2} a^3$$

$$Q = \frac{U\, a}{3}$$

Problema 5.8
Calcular los factores de corrección de la energía cinética y de la cantidad de movimiento para flujo laminar entre placas fijas y paralelas.

La ecuación general para la velocidad instantánea, u, en flujo laminar entre placas es,

$$u = \frac{U\, y}{a} - \frac{1}{2\mu}\frac{d}{dl}(p + \gamma\, h)\left(a\, y - y^2\right)$$

Como la velocidad en la placa superior es cero, de decir, U = 0, la velocidad se puede expresar como

$$u = -\frac{1}{2\mu}\frac{d}{dl}(p + \gamma\, h)\left(a\, y - y^2\right)$$

Determinación del caudal

$$Q = \int_0^a u\, d\, y$$

$$Q = \int_0^a -\frac{1}{dl}(p + \gamma\, h)\left(a\, y - y^2\right)\frac{1}{2\mu} dy$$

$$Q = -\frac{1}{12\mu}\frac{d}{dl}(p + \gamma\, h) a^3$$

La velocidad media es

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{a} = -\frac{1}{12\mu}\frac{d}{dl}(p + \gamma h)a^2$$

La relación u/V será entonces

$$\frac{u}{V} = \frac{-\frac{1}{2\mu}\frac{d}{dl}(p + \gamma h)(a y - y^2)}{-\frac{1}{12\mu}\frac{d}{dl}(p + \gamma h)a^2} = 6\left(\frac{y}{a} - \frac{y^2}{a^2}\right)$$

Determinación del factor de corrección de la energía cinética α

$$\alpha = \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{u}{V}\right)^3 dA = \frac{1}{a}\int_0^a \left[6\left(\frac{y}{a} - \frac{y^2}{a^2}\right)\right]^3 dy$$

$$\alpha = \frac{6^3}{a}\int_0^a \left[\left(\frac{y}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{y}{a}\right)^4 + 3\left(\frac{y}{a}\right)^5 - \left(\frac{y}{a}\right)^6\right] dy$$

$$\alpha = \frac{54}{35}$$

Determinación del factor de corrección de la cantidad de movimiento

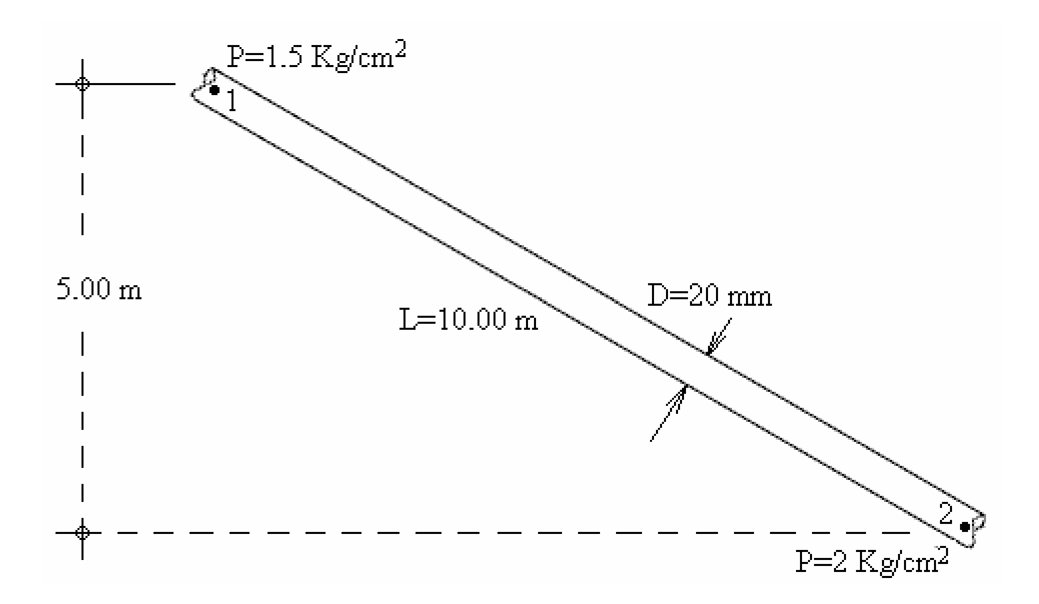
$$\beta = \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{u}{V}\right)^2 dA$$

$$\beta = \frac{1}{a}\int_0^a \left[6\left(\frac{y}{a} - \frac{y^2}{a^2}\right)\right]^2 dy$$

$$\beta = \frac{6^2}{a}\int_0^a \left(\frac{y^2}{a^2} - 2\frac{y^3}{a^3} + \frac{y^4}{a^4}\right) dy$$

$$\beta = \frac{6}{5}$$

Problema 5.9
En el tubo representado en la figura circula un fluido de peso específico, γ, de 800 kg/m^3, y viscosidad, μ, de 0.40 poise. Determinar:
a) La dirección del flujo
b) El caudal en lts/min
c) El número de Reynolds



Una forma de resolver este problema es:

Suponiendo que existe un plano de referencia que pasa por el punto 2 se tiene

En el punto $\quad p + \gamma\, h = 1.5 \times 10^4 + 800 \times 5.00 = 19000$ kg/m^2

En el punto $\quad p + \gamma\, h = 2.0 \times 10^4 + 800 \times 0.00 = 20000$ kg/m^2

El flujo se produce de mayor a menor gradiente, es decir del punto 2 hacia el punto 1

$$\frac{d}{d1}(p + \gamma\, h) = \frac{19000 - 20000}{10} = -100\frac{kg/m^2}{m}$$

La expresión del caudal en tuberías, para flujo laminar es

$$Q = -\frac{\pi a^4}{8\mu}\frac{d}{d1}(p + \gamma h)$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$Q = -\frac{\pi\ 0.01^4}{8(0.4/98)}(-100) = 0.0000961\ \ m^3/s$$

lo que expresado en lts/min es

Q = 0.0000961 x 1000 x 60 = 5.766 lts/min

Determinación de la velocidad media

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.0000961}{\frac{\pi}{4}\ 0.02^2} = 0.306\ \ m/s$$

Determinación del número de Reynolds

$$R = \frac{V\,D\,\rho}{\mu} = \frac{0.306\ x\ 0.20\,x\ 800/9.81}{0.40/98} = 122.4$$

El flujo es laminar por lo tanto son válidas las fórmulas utilizadas

Otra forma de resolver este problema es, sabiendo que el flujo se produce del punto 2 hacia el punto 1; así,

Si se supone que el flujo es laminar, entonces $f = \dfrac{64}{R}$

Al aplicar la ecuación de Bernoulli entre el punto 2 y el punto 1 se obtiene

$$\frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 + \frac{64}{R}\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$\frac{2\,x10^4}{800} + \frac{V^2}{2\,g} + 0.00 = \frac{1.5\,x10^4}{800} + \frac{V^2}{2\,g} + 5.00 + \frac{64}{\dfrac{V\,x\ 0.02\,x\ 800/9.81}{0.04/98}}\ \frac{10.00\ \ V^2}{0.02\ \ x\ 19.62}$$

Al despejar resulta

V = 0.306 m/s

y el caudal es

$$Q = V\ A = 0.306\frac{\pi}{4}(0.02)^2 = 961\,x10^{-7}\ m^3/s$$

lo que expresado en lts/min es

Q = 0.0000961 x 1000 x 60 = 5.766 lts/min

Determinación del número de Reynolds

$$R = \frac{V\,D\,\rho}{\mu} = \frac{0.306 \text{ x } 0.20 \text{ x } 800/9.81}{0.40/98} = 122.4$$

por lo tanto es válida la hipótesis de suponer $f = \frac{64}{R}$ ya que el flujo es laminar.

Problema 5.10
A que distancia r, del centro del tubo de radio r_o aparece la velocidad media en flujo laminar.

La expresión de la velocidad instantánea para flujo laminar, en tuberías es

$$u = -\frac{1}{4\mu}\frac{d}{dl}(p + \gamma h)\left(r_o^2 - r^2\right)$$

La expresión de la velocidad media para flujo laminar, en tuberías es

$$V_{med} = -\frac{r_o^2}{8\mu}\frac{d}{dl}(p + \gamma h)$$

con el fin de determinar la distancia r, donde la velocidad instantánea es igual a la velocidad media se igualan las expresiones anteriores y se obtiene

$$-\frac{1}{4\mu}\frac{d(p+\gamma h)}{dl}\left(r_o^2 - r^2\right) = -\frac{r_o^2}{8\mu}\frac{d(p+\gamma h)}{dl}$$

$$\frac{r_o^2 - r^2}{4} = \frac{r_o^2}{8}$$

$$r = \frac{r_o}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\; r_o$$

Problema 5.11
En flujo laminar el caudal en una tubería de 7 cm de diámetro es 6.75 lts/s y el esfuerzo cortante en la pared es 4.8 kg/m^2. Determinar:
a) La viscosidad del fluido.
b) El esfuerzo cortante para r =1 cm.

La expresión del esfuerzo cortante es

$$\tau = \mu \frac{du}{dr}$$

para el caso de flujo laminar en tuberías

$$\tau = \mu \left(- \frac{1}{4\mu} \frac{d}{dl}(p + \gamma h)(-2r) \right)$$

en la pared, el esfuerzo cortante es

$$\tau_o = \frac{r_o}{2} \frac{d}{dl}(p + \gamma h)$$

de donde

$$\frac{d}{dl}(p + \gamma h) = \frac{2\tau_o}{r_o} = \frac{2 \times 4.8}{0.035} = 279.29 \text{ kg/m}^2\text{/m}$$

La expresión del caudal en tuberías, para flujo laminar es

$$Q = \frac{\pi r^4}{8\mu} \frac{d}{dl}(p + \gamma h)$$

de donde

$$\mu = \frac{\pi r^4}{8Q} \frac{d}{dl}(p + \gamma h)$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$\mu = \frac{\pi \; 0.035^4}{8 \times 6.75 \times 10^{-3}} 279.29 = 0.0239 \frac{\text{kg s}}{\text{m}^2}$$

a una distancia, r = 1 cm del centro de la tubería , el esfuerzo cortante es

$$\tau_1 = \frac{r}{2}\frac{d}{dl}(p + \gamma h)$$

$$\tau_1 = \frac{0.01}{2}\, 279.29 = 1.37 \frac{kg}{m^2}$$

Problema 5.12
Calcular el diámetro de una tubería vertical para que fluya un líquido, de viscosidad cinemática 1.50 x 10^{-6} m^2/s, con un número de Reynolds de 1800, si la presión permanece constante.

La expresión de la velocidad media para flujo laminar, en tuberías es

$$V_{med} = -\frac{r_o^2}{8\mu}\frac{d}{dl}(p + \gamma h)$$

para el presente caso $\frac{dp}{dl} = 0$, y $\frac{dh}{dl} = -1$, entonces

$$V_{med} = \frac{r_0^2}{8\mu}\gamma$$

$$V_{med} = \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^2 \gamma}{8\mu} = \frac{D^2\gamma}{32\mu}$$

La expresión del número de Reynolds para el presente caso es

$$R = \frac{V D}{\upsilon} = \frac{D^2 \gamma D}{32\mu\upsilon} = \frac{D^2 \rho g}{32\mu\upsilon} = \frac{D^3 g}{32\frac{\mu}{\rho}\upsilon} = \frac{D^3 g}{32\ \upsilon^2}$$

siendo el diámetro

$$D = \left(\frac{32\ \upsilon^2\ R}{g}\right)^{1/3}$$

Al sustituir los valores numéricos resulta

$$D = \left[\frac{32\ (1.5 \times 10^{-6})^2 \times 1800}{9.81}\right]^{1/3}$$

$$D = 2.36 \times 10^{-3}\ m$$

Problema 5.13
A través de la tubería horizontal de 1 cm de diámetro circula glicerina a 27° C, con una caída de presión de 1.2 kg/cm^2 por metro lineal de tubería. Calcular el caudal y el número de Reynolds.

En los gráficos de viscosidad cinemática y dinámica se obtiene para la glicerina a 27° C.

$$\mu = 3.3 \text{ x } 10^{-2} \ \frac{\text{kg s}}{\text{m}^2}$$

$$\nu = 2.2 \text{ x } 10^{-4} \ \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

La expresión del caudal es

$$Q = \frac{\pi D^4 \Delta p}{128 \mu L} = \frac{\pi \left(10^{-2}\right)^4 1.2 \text{ x} 10^4}{128 \text{ x} 3.3 \text{x} 10^{-2}} = 0.8925 \text{ x} 10^{-4}$$

Determinación del número de Reynolds

$$R = \frac{V D \rho}{\mu} = \frac{Q D}{\frac{\pi D^2}{4} \frac{\mu}{\rho}} = \frac{4 Q}{\pi D \gamma} = \frac{4 \text{ x } 0.8925 \text{ x } 10^{-4}}{\pi \ 10^{-2} \text{ x } 2.2 \text{ x } 10^{-4}} = 51.65$$

Problema 5.14
Determinar el coeficiente de corrección de la cantidad de movimiento y de la energía cinética, para un flujo laminar en un tubo circular.

El coeficiente de corrección de la cantidad de movimiento es

$$\beta = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{u}{V}\right)^2 dA$$

El coeficiente de corrección de la energía cinética es

$$\alpha = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{u}{V}\right)^3 dA$$

La expresión de la velocidad instantánea, para flujo laminar, en tuberías es

$$u = -\frac{1}{4\mu} \frac{d(p + \gamma h)}{d l} \left(r_o^2 - r^2\right)$$

La expresión de la velocidad media para flujo laminar, en tuberías es

$$V_{med} = -\frac{r_o^2}{8\mu}\frac{d(p+\gamma h)}{dl}$$

Al sustituir las expresiones de la velocidad instantánea y la velocidad media se tiene el coeficiente de corrección de la cantidad de movimiento

$$\beta = \frac{1}{\pi r_o^2}\int_0^{r_0}\left(\frac{-\frac{1}{4\mu}\frac{d}{dl}(p+\gamma h)\left(r_o^2 - r^2\right)}{-\frac{r_o^2}{8\mu}\frac{d}{dl}(p+\gamma h)}\right)^2 2\pi r\,dr$$

$$\beta = \frac{1}{\pi r_o^2}\int_0^{r_0}\left(2\left(1-\left(\frac{r}{r_o}\right)^2\right)\right)^2 2\pi r\,dr = \frac{4}{3}$$

Al sustituir las expresiones de la velocidad instantánea y la velocidad media se tiene el coeficiente de corrección de la energía cinética

$$\alpha = \frac{1}{\pi r_o^2}\int_0^{r_0}\left(2\left(1-\left(\frac{r}{r_o}\right)^2\right)\right)^3 2\pi r\,dr = 2$$

Problema 5.15

Un aceite de densidad relativa, S = 0.87 y viscosidad, μ = 0.52 poise, fluye a través del espacio comprendido entre dos tubos concéntricos, horizontales, si el radio exterior es a = 1.00 cm, el radio interior es b = 0.50 cm y la tensión de cortadura en la pared exterior es de 1 kg/m^2. Determinar:

a) La caída de presión por unidad de longitud.
b) El caudal en lts/h
c) La fuerza axial por metro de longitud sobre el tubo interior.

La expresión de la velocidad instantánea, para flujo laminar, en anillos es

$$u = \frac{-1}{4\mu}\frac{d}{dl}(p+\gamma h)\left(a^2 - r^2 + \frac{a^2-b^2}{\ln\frac{b}{a}}\ln\frac{a}{r}\right)$$

para el presente caso como el conducto es horizontal

$\frac{dh}{dl} = 0$, entonces la expresión anterior se puede escribir como

$$u = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dl}\left(a^2 - r^2 + \frac{a^2 - b^2}{\ln \frac{b}{a}} \ln a\, r^{-1} \right)$$

La expresión del esfuerzo cortante es

$$\tau = \mu \frac{du}{dr}$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{-1}{4\mu} \frac{dp}{dl} \left(-2r + \frac{a^2 - b^2}{\ln \frac{b}{a}} \left(\frac{-1}{r} \right) \right)$$

$$\tau = -\mu \left(\frac{-1}{4\mu} \frac{dp}{dl} \left(-2r + \frac{a^2 - b^2}{\ln \frac{b}{a}} \left(\frac{-1}{r} \right) \right) \right)$$

para $r = a$

$$\tau_{r=a} = -\mu \left(\frac{-1}{4\mu} \frac{dp}{dl} \left(-2a + \frac{a^2 - b^2}{-a \ \ln \frac{b}{a}} \right) \right)$$

de donde

$$\frac{dp}{dl} = \frac{-4\tau}{2a + \frac{a^2 - b^2}{a \ln \frac{b}{a}}}$$

Al sustituir los valores numéricos resulta

$$\frac{dp}{dl} = \frac{-4 \times 1.00}{2 \times 0.01 + \left(\frac{0.01^2 - 0.005^2}{0.01 \ln \frac{0.005}{0.010}} \right)} = 435.74 \ \frac{kg/m^2}{m}$$

La expresión del caudal, para flujo laminar, en anillos es

$$Q = \frac{-\pi}{8\,\mu}\;\frac{d\,p}{d\,l}\left(a^4 - b^4 - \frac{\left(a^2 - b^2\right)^2}{\ln\frac{a}{b}}\right)$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$Q = -\frac{3.14 \text{ x } 98}{8 \text{ x } 0.52}\;435.74\left(0.01^4 - 0.005^4 - \frac{\left(0.01^2 - 0.005^2\right)^2}{\ln\frac{0.01}{0.005}}\right)$$

$$Q = 4.06074 \text{ x } 10^{-5}\;\frac{m^3}{s}$$

$$Q = 4.06074 \text{ x } 10^{-5} \text{ x } 1000 \text{ x } 3600 = 146.19 \text{ lts/h}$$

$$\frac{d\,u}{d\,r} = \frac{-1}{4\,\mu}\;\frac{d\,p}{d\,l}\left(-2\,r + \frac{a^2 - b^2}{\ln\frac{b}{a}}\left(\frac{-1}{r}\right)\right)$$

para $r = b$

$$\tau_{r=b} = \frac{1}{4}\frac{d\,p}{d\,l}\left(2\,b + \frac{a^2 - b^2}{b\,\ln\frac{b}{a}}\right)$$

la fuerza en el tubo interior es

$$F = \tau\,(2\,\pi\,b\,L)$$

$$F = \frac{1}{4}\;\frac{d\,p}{d\,l}\left(2\,b + \frac{a^2 - b^2}{b\,\ln\frac{b}{a}}\right)2\,\pi\;b \text{ x } 1.00$$

$$F = \frac{1}{4}\;435.74\left(2 \text{ x } 0.005 + \frac{0.01^2 - 0.005^2}{0.005\ln\frac{0.005}{0.01}}\right)2 \text{ x } 3.14 \text{ x } 0.005 \text{ x } 1.00$$

$$F = -\,0.04\;\text{ kg}$$

Problema 5.16
Una tubería lisa de 0.90 m de diámetro conduce 1.70 m^3/s de petróleo cuya densidad relativa es 0.70 y su viscosidad cinemática 1.00 x 10^{-4} m^2/s. Determinar:
a) La velocidad en el centro de la tubería.
b) El esfuerzo τ_o en la pared.
c) Calcular el espesor δ' de la sub-capa limite laminar.
d) La potencia necesaria para bombear el petróleo a una distancia de 40 km, si la tubería es horizontal.

Determinación de la velocidad media

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{1.70}{\frac{\pi}{4} 0.90} = 2.68 \text{ m/s}$$

Determinación del número de Reynolds

$$R = \frac{V\,D}{\nu} = \frac{2.68 \times 0.90}{1.00 \times 10^{-4}} = 24075$$

Con el valor del número de Reynolds, $R = 2.4 \times 10^4$ y tubería lisa se encuentra en el diagrama de Moody un valor del coeficiente de fricción $f = 0.024$

La expresión de la velocidad para flujo turbulento de tuberías es

$$\frac{u - V}{v_*} = 5.75 \log \frac{y}{r_o} + 3.75$$

en el centro de la tubería $y = r_o$, entonces

$$\frac{u - V}{v_*} = 3.75$$

como

$$v_* = V \sqrt{\frac{f}{8}}$$

se obtiene al despejar

$$u_{centro} = 3.75 \left(\sqrt{\frac{f}{8}}\, V \right) + V$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$u_{centro} = 3.75 \sqrt{\frac{0.024}{8}} \times 2.68 + 2.68 = 3.22 \text{ m/s}$$

Determinación del esfuerzo cortante en la pared

La velocidad de corte es

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} \quad \Rightarrow \quad \tau_o = v_*^2 \ \rho \quad \Rightarrow \quad \tau_o = \left(V \sqrt{\frac{f}{8}} \right)^2 \rho$$

$$\tau_o = 2.68^2 \ \frac{0.024}{8} \ 0.70 \times 102 = 1.53 \text{ kg/m}^2$$

Determinación del espesor de la sub-capa límite laminar

$$\delta' = \frac{11.6 \ \nu}{v_*}$$

$$\delta' = \frac{11.6 \times 10^{-4}}{2.68 \sqrt{0.024/8}} = 7.9 \times 10^{-3} \text{ m} = 7.9 \text{ mm}$$

Determinación de la potencia

$$P = \frac{Q \ \gamma \ hf}{75} = \frac{Q \ \gamma}{75} \ f \ \frac{L}{D} \ \frac{V^2}{2g}$$

$$P = \frac{1.70 \times 0.70 \times 1000}{75} \ 0.024 \ \frac{40000}{0.90} \ \frac{2.68^2}{19.62}$$

$$P = 6172 \text{ C V}$$

Problema 5.17

En una tubería de concreto, con rugosidad, $\varepsilon = 0.30$ mm, de 20 cm de diámetro, fluye un caudal de 3000 lts/min de agua de viscosidad cinemática 10^{-6} m^2/s. Determinar la pérdida de energía por kilometro de tubería.

Determinación del coeficiente de fricción

Si el flujo es completamente turbulento, sobre contorno rugoso, se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{f}} \; 2 \log \left(3.71 \frac{D}{\varepsilon} \right)$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$\frac{1}{\sqrt{f}} \; 2 \log \left(3.71 \frac{200}{0.3} \right) \qquad \Rightarrow \; f = 0.0217$$

Determinación de la velocidad media

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{\left(\frac{3000}{1000 \times 60} \right)}{\frac{\pi}{4} \times 0.20^2} = 1.59 \text{ m/s}$$

Determinación del número de Reynods

$$R = \frac{V\,D}{\upsilon} = \frac{1.59 \times 0.20}{10^{-6}} = 3.18 \times 10^5$$

Determinación de la velocidad de corte

$$v_* = V \sqrt{\frac{f}{8}} = 1.59 \sqrt{\frac{0.0217}{8}} \; 0.0828 \text{ m/s}$$

Verificación si el contorno es rugoso o no

$$\frac{v_* \varepsilon}{\nu} = \frac{0.0828 \times 0.3 \times 10^{-3}}{10^{-6}} = 24.80$$

$$5 < 24.80 < 70$$

lo que indica que el flujo se encuentra en la zona intermedia, por lo tanto el valor del coeficiente de fricción calculado anteriormente no es el verdadero, éste se puede encontrar mediante la ecuación

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log\left(\frac{2.51}{R\sqrt{f}} + \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log\left(\frac{2.51}{3.18 \times 10^5 \sqrt{f}} + \frac{0.0003}{0.20}\right)$$

la cual se cumple para

$f = 0.022$

Determinación de las pérdidas por fricción

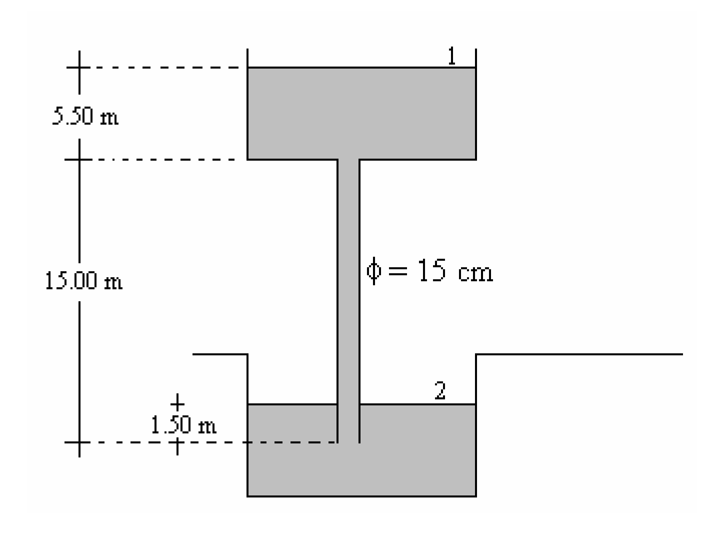
$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = 0.022 \frac{1000}{0.20} \frac{1.59^2}{19.62}$$

$h_f = 14.17$ m

Problema 5.18

En el esquema de la figura, la tubería es de hierro galvanizado de diámetro 15 cm, longitud 15.00 mts y rugosidad absoluta $\varepsilon = 0.0152$ cm. El agua en el tanque superior tiene una profundidad de 5.50 m y una viscosidad cinemática de 10^{-6} m^2/s. Considerando solamente pérdidas por fricción. Determinar:

a) El caudal
b) En base a sus cálculos determine si desde el punto de vista hidráulico las paredes de las tuberías se pueden considerar rugosas o no.



Aplicación de la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2, suponiendo que el plano de referencia arbitrario o datum pasa por el punto 2.

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+Z_1=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+Z_2+f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

para el presente caso V_1 y V_2 son cero por ser la superficie de tanques de grandes dimensiones, p_1 y p_2 son cero por estar en contacto con la atmósfera, la cota del punto 2 es cero ya que por ese punto pasa el plano de referencia y Z_2 es igual a 19.00 m; así,

$$19.00=f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Determinación del coeficiente de fricción

Si suponemos que el flujo es completamente turbulento y en un contorno rugoso, se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{f}}=2\log\frac{r_o}{\varepsilon}+1.74$$

$$f=\frac{1}{\left(2\log\frac{r_o}{\varepsilon}+1.74\right)^2}$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$f=\frac{1}{\left(2\log\frac{7.50}{0.0152}+1.74\right)^2}=0.0197$$

como la longitud de la tubería es de 15.00 m se obtiene al sustituir

$$19.00=0.0197\ \frac{15.00}{0.15}\frac{V^2}{2g}$$

Al despejar resulta

V = 13.76 m/s

Siendo el caudal

$$Q = V\,A = 13.76\ \frac{\pi}{4}\,0.15^2\ = 0.240\ \text{m}^3/\text{s}$$

Verificación del tipo de flujo

$$v_* \ = \ V\sqrt{\frac{f}{8}} \ = \ 13.76\sqrt{\frac{0.0197}{8}} \quad 0.68\ \text{m/s}$$

$$\frac{v_*\varepsilon}{\nu} \ = \ \frac{0.68\ \text{x}\ 0.000152}{10^{-6}} \ = \ 103.4$$

5 < 70 < 103.4 lo que indica que la turbulencia está completamente desarrollada, el contorno es rugoso y la hipótesis es correcta.

Problema 5.19

En una tubería de hierro fundido ε = 0.0259 cm y de 30 cm de diámetro, fluye agua con una viscosidad cinemática de 1 x 10 $^{-6}$, si la velocidad en el centro de la tubería es de 8.00 m/s. Determinar:

a) El caudal
b) El espesor de la subcapa límite laminar δ'

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log\frac{r_o}{\varepsilon} + 1.74$$

$$f = \frac{1}{\left(2\log\dfrac{r_o}{\varepsilon} + 1.74\right)^2}$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$f = \frac{1}{\left(2\log\dfrac{15}{0.0259} + 1.74\right)^2} = 0.019$$

Determinación de la velocidad de corte

$$\frac{u}{v_*} \ = \ 5.75\log\frac{y}{\varepsilon} \ + \ 8.5$$

en el centro de la tubería donde $y = r_o$, existe la velocidad máxima, entonces

$$\frac{u_{max}}{v_*} = 5.75 \log \frac{r_0}{\varepsilon} + 8.5$$

Al despejar y sustituir los valores numéricos se obtiene

$$v_* = \frac{8.00}{5.75 \log\left(\frac{15.00}{0.0259}\right) + 8.5} = 0.32 \text{ m/s}$$

Determinación de la velocidad media

$$v_* = V\sqrt{\frac{f}{8}}$$

$$V = \sqrt{\frac{8}{f}}\ v_* = \sqrt{\frac{8}{0.019}}\ 0.32 = 6.56 \text{ m/s}$$

Determinación del caudal

$$Q = V A = 6.56 \frac{\pi}{4} 0.30^2 = 0.46 \text{ m}^3/\text{s}$$

Verificación del tipo de flujo

$$\frac{v_* \varepsilon}{\nu} = \frac{0.32 \times 0.000259}{10^{-6}} = 82.88$$

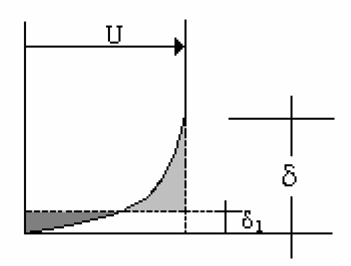
$5 < 70 < 82.88$ lo que indica que la turbulencia está completamente desarrollada, el contorno es rugoso y la hipótesis es correcta.

Determinación de la sub-capa límite laminar

$$\delta' = \frac{11.6\,\nu}{v_*} = \frac{11.6 \times 1 \times 10^{-6}}{0.32} = 3.65 \times 10^{-5} \text{ m}$$

Problema 5.20
Si la distribución de velocidades en la capa límite está dada por $u/U = 3\eta - 2\eta^2$, donde $\eta = y/\delta$.
Demostrar que el espesor desplazado de la capa límite es $\delta_1 = \delta/6$

El espesor desplazado δ_1 es la distancia que habría que desplazar la pared hacia dentro del fluido para que el caudal fuese el mismo que se tendría si no existiera el efecto de frenado de las partículas próximas a la pared, lo cual se representa en la siguiente figura



este espesor desplazado δ_1 está expresado analíticamente por

$$U\,\delta_1 = \int_0^{\delta} (U - u)\, d\,y$$

$$\delta_1 = \int_0^{\delta} \left(\frac{U}{U} - \frac{u}{U}\right) d\,y$$

$$\delta_1 = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\,y$$

para la distribución de velocidades del presente caso se tiene, al reemplazar $\frac{u}{U}$ por $3\eta - 2\,\eta^2$ y hacer el cambio de variable $y = \eta\,\delta$, los nuevos índices de integración resultan: para $y = 0$, $\eta = 0$, para $y = \delta$, $\eta = 1$

$$\delta_1 = \int_0^{1} \left(1 - 3\,\eta + 2\,\eta^2\right) \delta\, d\,\eta$$

Al integrar

$$\delta_1 = \delta \left[\eta - \frac{3}{2}\eta^2 + \frac{2}{3}\eta^3 \right]_0^1$$

$$\delta_1 = \delta \left[1 - \frac{3}{2} + \frac{2}{3} \right]$$

$$\delta_1 = \frac{\delta}{6}$$

Problema 5.21
Hallar el espesor δ de la capa límite laminar en función de la distancia x, y el número de Reynolds, si el perfil de velocidades está dado por la relación $u/U = (y/\delta)^{1/2}$ y el esfuerzo cortante, obtenido experimentalmente, es $\tau_o = 1.66\, U\mu/\delta$

La expresión del esfuerzo cortante es

$$\tau_o = \rho\, U^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{U}\right) \frac{u}{U}\, d\eta$$

Para la distribución de velocidades del presente caso se obtiene

$$\tau_o = \rho\, U^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 \left(1 - \eta^{1/2}\right) \eta^{1/2}\, d\eta$$

Al integrar

$$\tau_o = \rho\, U^2 \frac{d\delta}{dx} \left[\frac{2}{3}\eta^{3/2} - \frac{\eta^2}{2} \right]_0^1$$

$$\tau_o = \rho\, U^2 \frac{d\delta}{dx} \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right]$$

$$\tau_o = \frac{1}{6}\rho\, U^2 \frac{d\delta}{dx}$$

igualando la expresión anterior, del esfuerzo cortante con el obtenido experimentalmente se obtiene

$$\frac{1}{6}\rho\, U^2 \frac{d\delta}{dx} = 1.66 \frac{U\mu}{\delta}$$

$$\delta \, d\delta = 1.66 \frac{6 \, U \, \mu}{\delta \, U^2} \, dx$$

Al integrar se obtiene

$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{9.66 \, \mu}{\rho \, U} \, x + C$$

Las condiciones de borde son,

para $x = 0, \qquad \delta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C = 0$

la cual se puede escribir como

$$\frac{\delta^2}{x^2} = \frac{2\,(9.96)}{\dfrac{U \, \rho \, x}{\mu}}$$

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4.66}{(R_x)^{1/2}}$$

Problema 5.22

Se produce un flujo de aceite, de viscosidad cinemática 10^{-4} m^2/s y densidad relativa 0.8 sobre una lámina delgada de 3.00 m de ancho como se indica en la figura. Si la velocidad uniforme del flujo es de 6.00 m/s, hacia la derecha, y la de la placa de 2.00 m/s, hacia la izquierda. Determinar la velocidad a 2.00 m aguas abajo del inicio de la placa, a 15 mm y a 30 mm por encima de ella, según la suposición de Prandtl, y la resistencia si la longitud L es de 2.00 m

Determinación de la velocidad relativa

$U = V_1 - (-V_2) = 6.00 - (-2.00) = 8.00$ m/s

Determinación del número de Reynolds a una distancia de 2.00 m del inicio de la placa

$$R_x = \frac{U\,x}{\upsilon} = \frac{8.00 \text{ x } 2.00}{10^{-4}} = 1.60 \text{ x } 10^{5}$$

Como el número de Reynolds es menor que 5 x 10 ^{5}, entonces la capa límite, aún es laminar para x = 2.00 m

$$\delta = \frac{4.65\,x}{\left(R_x\right)^{1/2}} = \frac{4.65 \text{ x } 2.00}{\left(1.60 \text{ x } 10^{5}\right)^{1/2}} = 0.02325 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \delta = 23.25 \text{ mm}$$

Determinación de la velocidad a 2.00 m del inicio de la placa y a 15 mm por encima de ésta

La expresión de la velocidad es, según Prandtl,

$$u = \left[\frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^{3}\right] U$$

entonces para y = 15 cm y δ = 23.25 cm

$$u = \left[\frac{3}{2}\left(\frac{15}{23.25}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{15}{23.25}\right)^{3}\right] 8.00 = 6.67 \text{ m/s}$$

para y = 30 mm el punto se encuentra por encima de la capa límite (zona no perturbada) por lo tanto la velocidad u = U = 8.00 m/s

Determinación de la resistencia

$$R = 0.644\left(\sqrt{\mu\,\rho\,U^{3}\,L}\right)B = 0.644\left(\sqrt{\upsilon\,\rho^{2}\,U^{3}\,L}\right)B$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$R = 0.644\left(\sqrt{10^{-4}\left(\frac{800}{9.81}\right)^{2} 8.00^{3} \text{ x } 2.00}\right) 3.00 = 50.43 \text{ kg}$$

Problema 5.23
Un tren aerodinámico que mide 120.00 m de longitud viaja a través de aire en reposo, de peso específico 1.2047 kg/m^3 y viscosidad 18.288 x 10^{-7} kg s/m^2, a una velocidad de 144 Km/h. Considerando los lados y la parte superior como una placa plana pulida de 9.00 m de ancho. Determinar:
c) La fuerza de arrastre sobre esta superficie y la potencia necesaria para vencer esta resistencia.
d) La longitud de la capa límite laminar y su máximo espesor.
e) El espesor de la capa límite en el extremo posterior del tren.

Determinación del número de Reynolds de la placa

$$R_L = \frac{U\,L\,\rho}{\mu}$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$R_L = \frac{\left(\frac{144 \text{ x } 1000}{3600}\right) 120.00 \left(\frac{1.2047}{9.81}\right)}{18.288 \text{ x } 10^{-7}} = 3.2 \text{ x } 10^{8}$$

Lo que indica que la capa límite es turbulenta

El coeficiente de arrastre para este caso es

$$C_D = \frac{0.074}{(R_x)^{1/5}}$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$C_D = \frac{0.074}{\left(3.2 \text{ x } 10^{8}\right)^{1/5}} = 1.47 \text{ x } 10^{-3}$$

Determinación de la fuerza de arrastre

$$F = C_D\,\rho\,(L \text{ x } B)\,\frac{U^2}{2}$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$F = 1.47 \text{ x } 10^{-3} \, \frac{1.2047}{9.81} \, (120.00 \text{ x } 9.00) \, \frac{\left(\frac{144 \text{ x } 1000}{3600}\right)^2}{2} = 155.97 \text{ kg}$$

Determinación de la potencia

$$P_{CV} = \frac{F \, U}{75}$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$P_{CV} = \frac{155.97\left(\frac{144 \text{ x } 1000}{3600}\right)}{75} = 83.18 \text{ CV}$$

Determinación de la distancia X, hasta donde la capa límite es laminar, esto ocurre donde el número de Reynolds es $5 \text{ x } 10^5$

$$R_x = \frac{U \, X \, \rho}{\mu} = \frac{\left(\frac{144 \text{ x } 1000}{3600}\right) X \left(\frac{1.2047}{9.81}\right)}{18.288 \text{ x } 10^{-7}}$$

$$5 \text{ x } 10^5 = \frac{\left(\frac{144 \text{ x } 1000}{3600}\right) X \left(\frac{1.2047}{9.81}\right)}{18.288 \text{ x } 10^{-7}}$$

Al despejar se obtiene $X = 0.19$ m

En este lugar el espesor de la capa límite laminar es

$$\delta = \frac{4.65 \, X}{(R_x)^{1/2}} = \frac{4.65 \text{ x } 0.19}{\left(5 \text{ x } 10^5\right)^{1/2}} = 0.001249 \text{ m} \qquad \Rightarrow \qquad \delta = 1.249 \text{ mm}$$

En la parte posterior de tren la capa límite es turbulenta, el espesor es

$$\delta_L = \frac{0.37 \, L}{(R_L)^{1/5}}$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$\delta_L = \frac{0.37 \text{ x } 120.00}{\left(3.2 \text{ x } 10^8\right)^{1/5}} = 0.88 \text{ m}$$

Problema 5.24

Por una tubería de hierro galvanizado de 5.00 m de diámetro, fluyen 31.1 m^3/s de agua a 21.1^0. Determinar:

a) El espesor de la subcapa límite laminar.
b) Suponiendo que la capa límite es toda turbulenta, calcular la longitud necesaria para que la capa límite llegue al centro de la tubería.

Con una temperatura de 21.2^0 C se obtiene, en la tabla de las propiedades físicas del agua

$\upsilon = 0.975 \text{ x } 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ y $\gamma = 999 \text{ kg/m}^3$

Determinación de la velocidad media

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{31.1}{\frac{\pi}{4} 5.00^2} = 1.58 \text{ m/s}$$

Determinación del número de Reynolds y de la rugosidad relativa

$$R = \frac{1.58 \text{ x } 5.00}{0.975 \text{ x } 10^{-6}} = 8.13 \text{ x } 10^6 \quad \text{y} \quad \frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.0152}{500} = 3 \text{ x } 10^{-5}$$

con $R = 8.13 \text{ x } 10^6$ y $\frac{\varepsilon}{D} = 0.00003$ se encuentra en el diagrama de Moody $f = 0.01$

Determinación de la velocidad de corte

$$v_* = V\sqrt{\frac{f}{8}}$$

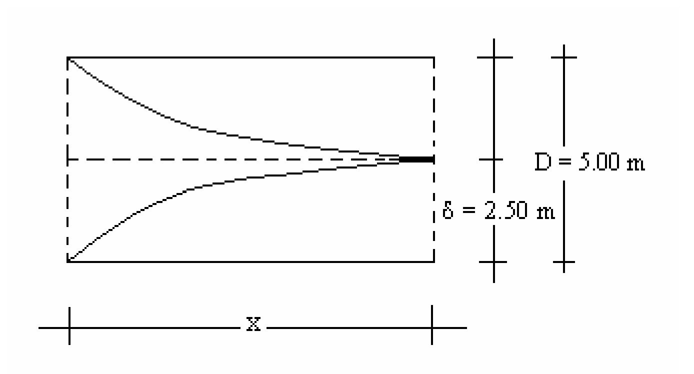
Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$v_* = 1.58\sqrt{\frac{0.01}{8}} = 0.056 \text{ m/s}$$

Determinación del espesor de la sub-capa límite laminar

$$\delta' = \frac{11.6 \times 0.975 \times 10^{-6}}{0.056} = 2.02 \times 10^{-5} \text{ m}$$

Determinación de la distancia donde la capa límite alcanza el centro de la tubería



$$\frac{\delta}{x} = \frac{0.37}{(R_x)^{1/5}} = \frac{0.37}{\left(\frac{U\,x}{\upsilon}\right)^{1/5}} = \frac{0.37}{\left(\frac{U}{\upsilon}\right)^{1/5} x^{1/5}}$$

$$x^{4/5} = \frac{\delta\left(\frac{U}{\upsilon}\right)^{1/5}}{0.37}$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$x^{4/5} = \frac{2.50\left(\frac{1.58}{0.975 \times 10^{-6}}\right)^{1/5}}{0.37} = 118.01 \text{ m}$$

$$x = (118.01)^{5/4} = 388.96 \text{ m}$$

Problema 5.25
Un automóvil que se desplaza a una velocidad de 108 Km/h tiene un coeficiente de arrastre C_D=0,28 y un área transversal de 1.60 m^2. Determinar la potencia necesaria para vencer la resistencia del aire cuya densidad es ρ = 0.125 UTM/m^3.

Determinación de la fuerza de arrastre

$$F = C_D\,\rho\,\frac{U^2}{2}\,A$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$F = 0.28 \times 0.125\ \frac{\left(\frac{108 \times 1000}{3600}\right)^2}{2}\ 1.60$$

F = 25.20 kg

La potencia, expresada en caballos de vapor, CV; es

$$P_{CV} = \frac{F\,U}{75}$$

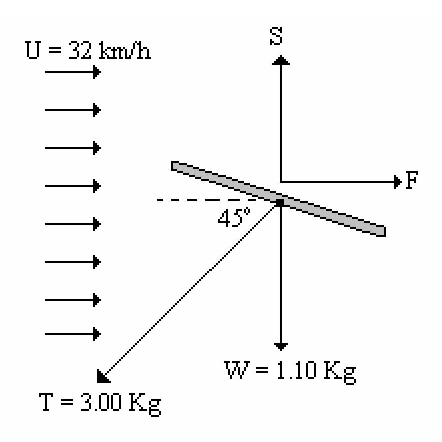
Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$P = \frac{25.20\left(\frac{108 \times 1000}{3600}\right)}{75}$$

P = 10 CV.

Problema 5.26
Un papagayo rectangular de 1.00 m x 0.75 m, pesa 1.10 kg. La fuerza de tracción en el hilo de sujeción del papagayo es de 3 kg cuando éste forma un ángulo de 45^0 con la horizontal. Para una velocidad del viento de 32 Km/h, que sopla horizontalmente. Determinar:
El coeficiente de sustentación y el coeficiente de arrastre si el peso específico del aire es γ = 1.205 kg/m^3.
Nota: Considerar el papagayo como una placa plana que forma un pequeño ángulo con respecto a la dirección del viento.

Esquema de fuerzas



como el papagayo se encuentra en equilibrio, la sumatoria de fuerzas verticales y horizontales debe ser nula; es decir,

fuerzas verticales

$W + T \cos 45^{o} = S$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$1.10 + 3.00 \cos 45^{o} = S \quad \Rightarrow \quad S = 3.22 \text{ kg}$

fuerzas horizontales

$T \text{ sen } 45^{o} = F$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$3.00 \text{ sen } 45^{o} = F \quad \Rightarrow \quad F = 2.12 \text{ kg}$

La determinación del coeficiente de arrastre, se obtiene a partir de la fuerza de arrastre F; así,

$$F = C_D \, \rho \frac{U^2}{2} A$$

Al despejar y sustituir los valores numéricos se obtiene

$$C_D = \frac{2\,F}{\rho\, U^2 \, A} = \frac{2 \text{ x } 2.12}{\left(\frac{1.205}{9.81}\right)\left(\frac{32 \text{ x } 1000}{3600}\right)^2 (1.00 \text{ x } 0.75)}$$

$C_D = 0.58$

La determinación del coeficiente de sustentación C_L, se obtiene a partir de la fuerza de sustentación S; así,

$$S = C_L \, \rho \frac{U^2}{2} A$$

Al despejar y sustituir los valores numéricos se obtiene

$$C_L = \frac{2\,S}{\rho\, U^2\, A} = \frac{2 \text{ x } 3.22}{\left(\frac{1.205}{9.81}\right)\left(\frac{32 \text{ x } 1000}{3600}\right)^2 (1.00 \text{ x } 0.75)}$$

$$C_D = 0.88$$

Problema 5.27
Supongamos que una avioneta pesa 1800 kg y la superficie de sus alas es de 28.00 m^2. Determinar el ángulo que forman las alas con la horizontal a una velocidad de 160 Km/h. Suponer que el coeficiente de sustentación varía linealmente de 0.35 a 0º hasta 0.80 a 6º y que el peso específico del aire es de 1.20 kg/m^3.

Para que la avioneta se mantenga en el aire el peso de ésta debe ser igual a la fuerza de sustentación; es decir,

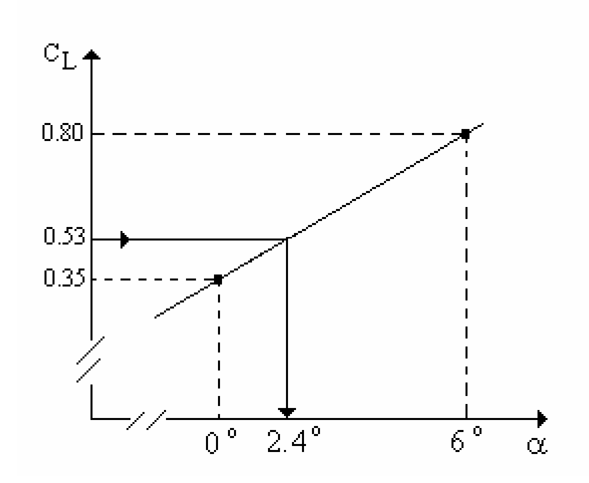
$$S = W$$

$$C_L \, \rho \frac{U^2}{2} A = W$$

$$C_L \left(\frac{1.20}{9.81}\right) \frac{\left(\frac{160 \text{ x } 1000}{3600}\right)^2}{2} 28.00 = 1800$$

$$C_L = 0.53$$

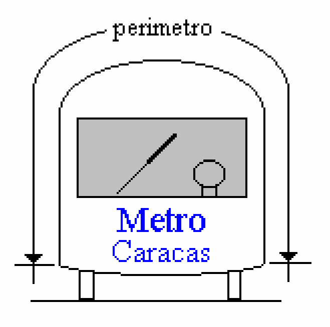
En la siguiente figura se presenta un esquema de la variación lineal entre el coeficiente de sustentación, C_L y el ángulo de ataque α, donde se puede encontrar que para el coeficiente de sustentación calculado de 0.53 corresponde un ángulo de ataque de 2.4 º



Angulo de ataque = 2.4º

Problema 5.28

Los vagones del metro de Caracas tienen forma aerodinámica para reducir la resistencia por fricción. La sección transversal de un vagón tiene un perímetro 10.00 m; para un conjunto de vagones, que en total tienen una longitud de 150.00 m. Determinar la resistencia por fricción a una velocidad de 100.00 Km/h y la potencia requerida para vencer tal resistencia. La densidad relativa del aire es de 1.25×10^{-3} y la viscosidad cinemática de 1.41×10^{-5} m^2/s.



Determinación del número de Reynolds en la parte posterior de los vagones

$$R = \frac{U\,L}{\upsilon} = \frac{\left(\frac{100 \text{ x } 1000}{3600}\right) 150.00}{1.41 \text{ x } 10^{-5}} = 2.96 \text{ x } 10^{8}$$

Como la capa límite es turbulenta y $1 \text{ x } 10^{6} < R < 1 \text{ x } 10^{9}$, entonces el coeficiente de arrastre se puede determinar así

$$C_D = \frac{0.455}{(\log R_L)^{2.58}} = \frac{0.455}{(\log 2.96 \text{ x } 10^{8})^{2.58}} = 1.84 \text{ x } 10^{-3}$$

Determinación de la fuerza de arrastre

$$F = C_D\,\rho \frac{U^2}{2} A$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$F = 0.00184 \left(1.25 \text{ x } 10^{-3} \text{ x } 102\right) \frac{\left(\frac{100 \text{ x } 1000}{3600}\right)^2}{2} 10.00 \text{ x } 150.00$$

F = 135.76 kg

La potencia, expresada en caballos de vapor, CV; es

$$P_{CV} = \frac{F\,U}{75}$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$P = \frac{135.76 \left(\frac{100 \text{ x } 1000}{3600}\right)}{75}$$

P = 50.28 CV.

Problema 5.29
Determinar la fuerza de arrastre, F, y la potencia, P, necesaria para remolcar a lo largo de su eje, 525.00 m de tubería de diámetro, ϕ, igual a 22.00 cm, a una velocidad de 2.00 m/s, si ésta se encuentra sumergida en el mar.
a) Si la tubería es de una sola pieza.
b) Si la tubería es arrastrada en trozos de 75 m como se muestra
Nota:
A los efectos del cálculo considere las tuberías como placas planas de ancho πD
$\nu = 1.20 \text{ x } 10^{-6}$ stokes, densidad del agua de mar = 105 UTM/m^3

Si la tubería es de una sola pieza

L = 525.00 m

el número de Reynolds es

$$R = \frac{U\,L}{\upsilon} = \frac{2.00 \text{ x } 150.00}{1.20 \text{ x } 10^{-6}} = 8.75 \text{ x } 10^{8}$$

Como la capa límite es turbulenta y $1 \text{ x } 10^{6} < R < 1 \text{ x } 10^{9}$, entonces el coeficiente de arrastre se pude determinar así

$$C_D = \frac{0.455}{\left(\log R_L\right)^{2.58}} = \frac{0.455}{\left(\log 8.75 \text{ x } 10^{8}\right)^{2.58}} = 1.6 \text{ x } 10^{-3}$$

Determinación de la fuerza de arrastre

$$F = C_D\,\rho\,\frac{U^2}{2}\,A$$

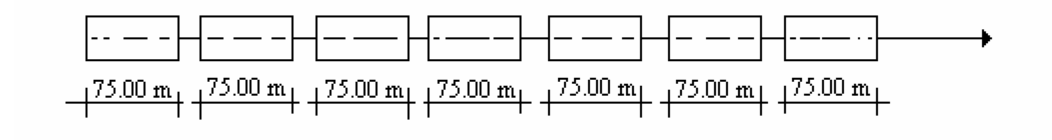
por ser hueca la tubería el área de contacto, A, es igual a $2\,\pi\,D\,L$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$F = 0.0016 \text{ x } 105\ \frac{2.00^{2}}{2}\left(2\,\pi\,0.22 \text{ x } 525.00\right)$$

F = 135.76 kg

Si la tubería es de siete piezas



el número de Reynolds es

$$R = \frac{U\,L}{\upsilon} = \frac{2.00 \text{ x } 75.00}{1.20 \text{ x } 10^{-6}} = 1.25 \text{ x } 10^{8}$$

Como la capa límite es turbulenta y $1 \text{ x } 10^{6} < R < 1 \text{ x } 10^{9}$, entonces el coeficiente de arrastre se puede determinar así

$$C_D = \frac{0.455}{\left(\log R_L\right)^{2.58}} = \frac{0.455}{\left(\log 1.25 \text{ x } 10^{8}\right)^{2.58}} = 2.1 \text{ x } 10^{-3}$$

Determinación de la fuerza de arrastre en los siete trozos de tubería

$$F = C_D\,\rho\,\frac{U^2}{2}\,A$$

por ser hueca la tubería el área de contacto, A, es igual a $2\,\pi\,D\,L_2$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$F = 7\left[0.0021 \text{ x } 105\ \frac{2.00^{\,2}}{2}\left(2\,\pi\,0.22 \text{ x } 75.00\right)\right]$$

F = 319.87 kg

La potencia, expresada en caballos de vapor, CV; es

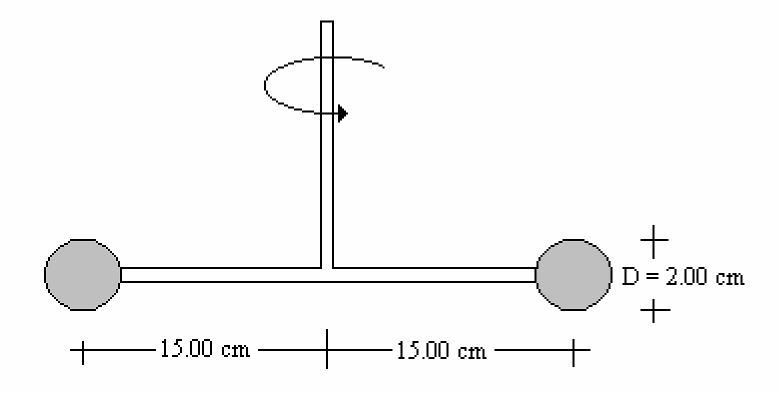
$$P_{CV} = \frac{F\,U}{75}$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$P = \frac{319.87 \text{ x } 2.00}{75}$$

P = 8.53 CV.

Problema 5.30
Un dispositivo mezclador de líquidos como el que se muestra en la figura, está formado por dos discos circulares delgados de 2.00 cm de diámetro cada uno, unidos a una barra vertical. Este dispositivo gira a una velocidad angular de 50 rpm, en agua con viscosidad cinemática de 1.15×10^{-6} m^2/s.
Determinar el par motor para que gire a dicha velocidad.



La fuerza de arrastre sobre cada disco está dada por

$$F = C_D \, \rho \frac{U^2}{2} A$$

La velocidad lineal U, se puede determinar como

$$U = \frac{2 \pi r n}{60}$$

Como r = 0.15 m y n = 50 rpm se obtiene al sustituir en la ecuación anterior

$$U = \frac{2 \; \pi \; 0.15 \times 50}{60} = 0.79 \text{ m/s}$$

Determinación del número de Reynolds

$$R = \frac{U D}{\upsilon} = \frac{0.79 \times 0.02}{1.15 \times 10^{-6}} = 1.40 \times 10^4$$

Con el valor de $R = 1.40 \times 10^4$, se encuentra en el gráfico correspondiente al coeficiente de arrastre para a discos, $C_D = 1.10$

Entonces la fuerza de arraste es

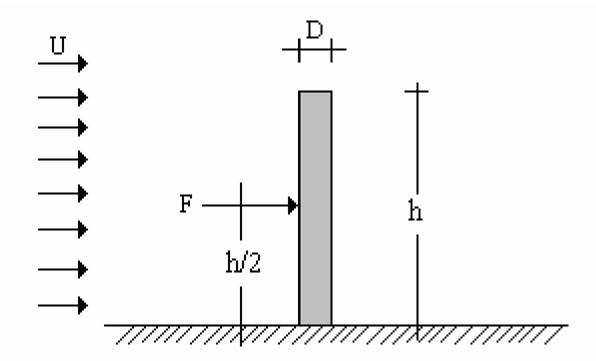
$$F = C_D \, \rho \frac{U^2}{2} A = 1.10 \; \frac{1000}{9.81} \; \frac{0.79^2}{2} \left(\frac{\pi}{4} 0.02^{\,2} \right) = 0.011 \text{ kg}$$

El par motor o momento es

$$M = F\ b = 0.011 \text{ x } 0.30 = 0.0033 \text{ kg m}$$

Problema 5.31

¿Cuál será el momento flector que produce el viento en la base de una chimenea cilíndrica de 70 cm de diámetro y 20 m de altura, si éste sopla a una velocidad uniforme de 54 Km/h?. La densidad del aire es $\rho = 0.12$ UTM/m^3; y la viscosidad cinemática $\nu = 7 \text{ x } 10^{-5}$ m^2/s.



La fuerza de arrastre es

$$F = C_D\, \rho \frac{U^2}{2} A$$

Determinación del número de Reynolds

$$R = \frac{U\, D}{\upsilon} = \frac{\left(\frac{54 \text{ x } 1000}{3600}\right) \text{ x } 0.70}{7 \text{ x } 10^{-6}} = 1.50 \text{ x } 10^{5}$$

Con el valor de $R = 1.50 \text{ x } 10^{5}$, se encuentra en el gráfico correspondiente al coeficiente de arrastre para a cilindros, $C_D = 1.20$

Entonces la fuerza de arraste es

$$F = C_D\, \rho \frac{U^2}{2} A = 1.20 \text{ x } 0.12\ \frac{\left(\frac{54 \text{ x } 1000}{3600}\right)^2}{2} (0.70 \text{ x } 20.00) = 226.80 \text{ kg}$$

El par o momento es

$$M = F\ \frac{h}{2} = 226.80\ \frac{20}{2} = 2268 \text{ kg m}$$

BIBLIOGRAFIA

Aguirre, J., Florez, I., Macagno, E. "**Mecánica de Fluidos Fundamental**", Consejo de Publicaciones, ULA, Mérida, 1987.

Irving H. Shames, "**Mecánica de Fluidos**", McGraw-Hill, inc. Colombia, 1995

R. Roca Vila, "**Introducción a la Mecánica de los Fluidos**", Editorial Limusa, México, 1978.

Streeter, Víctor L., "**Mecánica de los Fluidos**", McGraw-Hill, inc. México, 1974.

White, Frank M., "**Mecánica de Fluidos**", McGraw-Hill, inc. España, 1983.